

# Modèles de choix discrets avec influence sociale

Denis PHAN

Université de Rennes 1 - CREM - UMR CNRS 6211

<http://perso.uni-rennes1.fr/denis.phan>

## outline

- 1 - Le modèle de choix d'un agent
- 2 - Interprétation en terme de jeux de population
- 3 - premier aperçu des mécanismes collectifs, transitions de phases et phénomène d'hystérésis
- 4 - *Trade-off* prix-quantités
- Optimum asymptotique (statique) du monopole et régimes de profit : le « dilemme du vendeur »(Nadal et al. 2003, 2004, 2005)
- Schelling (1978, 1973), Granovetter (1978), Allen (1982)
- Kinderman, Snell 1980, Galam, Gefen, Shapir 1982, Weidlich & Haag 1983
- Föllmer (1974) Ionides (1990) Durlauf (1991, 1993, 1994, 1996), Glaser, Sacerdote, Scheinkman (1996) Benabou (1996)
- Blume(1993,1995,1998) Foster, Young (1990,1998) Baron, Durieu, Haller Solal (2004)
- Manski, 1993, 1995, 1997, 2000; Nadal, Weisbuch, chenevez, Kirman, 1998
- Ioannides (1997), Durlauf (1997,1999) Blume, Durlauf, (2001) Brock, Durlauf (2001), Orlean (2002) Phan, Nadal, Gordon (2004)
- Bourguine P., Nadal J.P.eds., (2004) *Cognitive Economics*, Springer Verlag

## 1 - Le modèle de choix d'un agent

### L'ensemble des choix individuels

- On considère  $N$  « agents » ( $i = 1, 2, \dots, N$ )
- Chaque agent «  $i$  » a le *choix entre plusieurs actions* possibles (choix « discret »)
  - On se limitera au *choix entre les deux branches d'une alternative* (choix « binaire »)
  - Lorsque l'ensemble des choix possibles contient plus de deux possibilités on dit que le choix est « multinomial »
- Selon le contexte, l'ensemble de choix sera désigné par :
  - $\Omega = \{0, 1\}$
  - (ex : acheter ou ne pas acheter, participer ou pas...)
- Le choix de l'agent «  $i$  » sera alors désigné par :
  - $\omega_i \in \Omega$  ; par exemple :
  - $\omega_i = 1$  pour « acheter » et  $\omega_i = 0$  pour « ne pas acheter »

# choix et influence sociale



• chaque individu maximise son surplus :  
prix de réserve

$$\text{si } V_i \equiv H + \theta_i + \sum_{k \in \mathcal{G}_i} J_{ik} \omega_k > P \Rightarrow \omega_i = 1$$

surplus :  $W_i = H + \theta_i + \sum_{k \in \mathcal{G}_i} J_{ik} \omega_k - P > 0$

$$\text{si } : V_i \equiv H + \theta_i + \sum_{k \in \mathcal{G}_i} J_{ik} \omega_k < P \Rightarrow \omega_i = 0$$

surplus :  $W_i = 0$

$$N_{\mathcal{G}_i} = \|\mathcal{G}_i\|$$

nombre de voisins de i

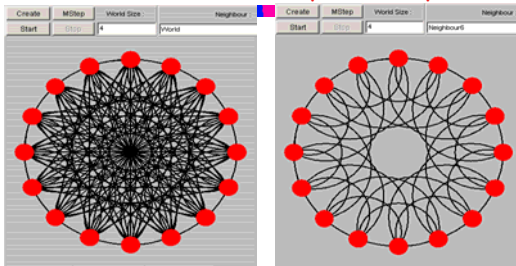
$$\sum_{k \in \mathcal{G}_i} J_{ik} \omega_k$$

pois attribué par i aux choix de ses « voisins »

choix du voisin k = 0 ou 1

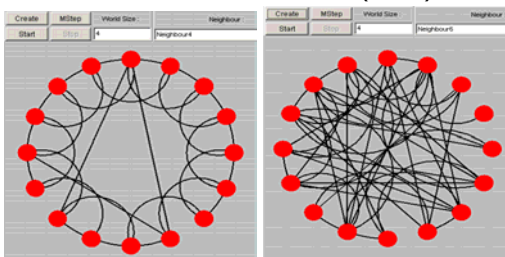
voisinage de i

## Des réseaux réguliers aux réseaux aléatoires en passant par les « petits mondes » (1)



Total connectivity

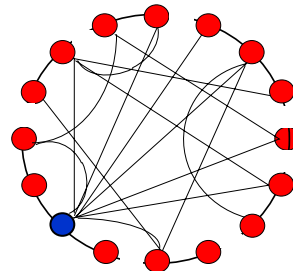
Regular network (lattice)



Small world 1 (Watts Strogatz)

Random network

- Milgram (1967)
  - "six degrees of separation"
- Watts and Strogatz (1998)
- Barabasi and Albert, (1999)
  - "scale free" (all connectivities)
  - multiplicative process → power law
  - blue agent is "hub" or "gourou"



## 2 - Interprétation en terme de jeux de population

### Coordination dans un jeu de population (Blume, 1997)

On détermine le *comportement moyen* pour chaque confrontation bilatérale - chaque joueur joue 1 seule stratégie pure contre une stratégie mixte  $\eta_{\mathcal{G}}$  représentative de la répartition des stratégies dans le voisinage (régulier  $\mathcal{G}$ , ) de l'agent, avec  $N_{\mathcal{G}i} = N_{\mathcal{G}}$ ,  $h_i = H_i/N_{\mathcal{G}}$ ,  $j_{ik} = j$  pour tout  $i, k \in \mathcal{I}^2$

$$w_i(\omega_i | p, \tilde{\eta}_{\mathcal{G}}) \equiv W_i(\omega_i | P, \tilde{\omega}_{-i}) / N_{\mathcal{G}} = \max_{\omega_i \in \{0,1\}} \left\{ \omega_i (h_i - p + j \cdot \tilde{\eta}_{\mathcal{G}}) \right\}$$

$$\omega^*(p, \tilde{\eta}_{\mathcal{G}}) \in \arg \max_{\omega_i \in \{0,1\}} \left\{ \omega_i (h_i - p + j \cdot \tilde{\eta}_{\mathcal{G}}) \right\} \quad \eta_{\mathcal{G}} \equiv \sum_{k \in \mathcal{G}} \omega_k / N_{\mathcal{G}}$$

	$S_0 \omega_i = 0$	$S_1 \omega_i = 1$		$S_0 \omega_i = 0$	$S_1 \omega_i = 1$
$S_0 \omega_i = 0$	0	0	$S_0 \omega_i = 0$	$P - h_i$	0
$S_1 \omega_i = 1$	$h_i - p$	$h_i + j - p$	$S_1 \omega_i = 1$	0	$h_i + j - p$

Jeu potentiel (Monderer Shapley, 1996)



## Coordination dans un jeu de population : 4 types



- Ceux avec :  $h_i > p$  adopteront toujours, quelque soit  $\eta_g$ .
  - $S_1$  est une stratégie strictement dominante pour tout  $\eta_g$ .  
 $S_1$  est donc la meilleure réponse contre toute combinaison convexe de  $S_0$  et  $S_1$
- Ceux avec :  $p > h_i > p-j/2$ 
  - la stratégie Pareto dominante est aussi *risque dominante*
  - adopterons pour tout  $\eta_g > (p - h_i) / j > 0$
- Ceux avec :  $p-j/2 > h_i > p-j$ 
  - la stratégie Pareto dominante est *risque dominée*
  - n'adopterons que si :  $\eta_g > (p - h_i) / j > 1/2$
- Ceux avec :  $h_i < p-j$  n'adopteront jamais, quelque soit le taux d'adoption dans le voisinage.
  - $S_1$  est une stratégie strictement dominée pour tout  $\eta_g$ .
  - $S_0$  est donc la meilleure réponse contre toute combinaison convexe de  $S_0$  et  $S_1$  (pour tous les taux d'adoption dans le voisinage : ).



## 3 - Premier aperçu des mécanismes collectifs, transitions de phases et phénomène d'hystérésis

## voisinage global : « champ moyen »



- on peut traiter n'importe quel type de voisinage

$$\omega_k = \frac{j}{\|\mathcal{G}_i\|} \sum_{k \in \mathcal{G}_i} \omega_k = j \eta_i$$

poids des « voisins »
nombre de voisins de i

remarque :

si  $\mathcal{G}_i$  fini : terme social très sensible au changement d'avis d'un seul voisin

- voisinage global  $\|\mathcal{G}_i\| = N - 1 \quad \forall i$
- et N très grand :  $\eta_i = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^N \omega_k \cong \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \omega_k \equiv \eta$
- limite des grands nombres :  $N \rightarrow \infty$ 
  - $\eta$  insensible aux fluctuations : les agents ne peuvent pas influencer individuellement le terme de choix collectif  $j \cdot \eta$

## Le modèle d'émeute de Granovetter (1978) revisité

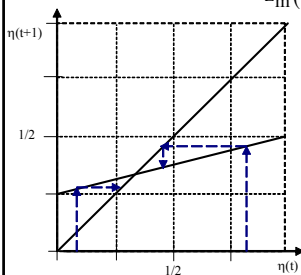


$$\omega^* \in \arg \max_{\omega_i \in \{0,1\}} \left\{ \pi_i(\omega_i(t) | \eta_a(t-1)) \right\}$$

$$z_m(\eta_a(t-1)) = p - h - j \cdot \eta_a(t-1)$$

$$\eta_a(t) = P(\omega_i = 1 | \eta_a(t-1)) = P(z_i > z_m(\eta_a(t-1)))$$

$$\eta_a(t) = \int_{z_m(\eta_a(t-1))}^{\infty} dF(x)$$

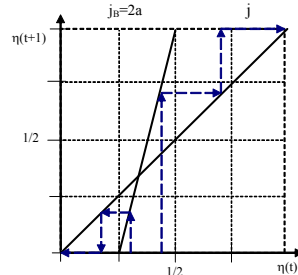
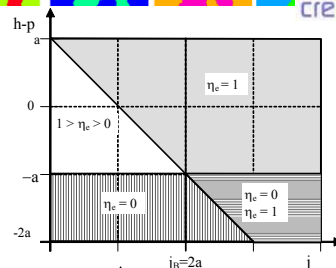


$$\eta_a(t) = \left( \frac{1}{2} + \frac{h-p}{2a} \right) + \frac{j \cdot \eta_a(t-1)}{2a}$$

$$\eta_e = \inf \{ \sup \{ 0, \eta^* \}, 1 \}$$

$$\eta^* = \frac{a + h - p}{2a - j}$$

Point critique :  $j = 2a$



(a) stabilité de l'adoption partielle  $0 < \eta < 1$  avec des adopteurs initiaux (agitateurs) :  $a > h-p > -a$

(b) instabilité du point fixe et coexistence de deux solutions stables  $\eta = 0, \eta = 1$  avec :  $h-p > -a$ , et :  $j > 2a$

# distribution logistique

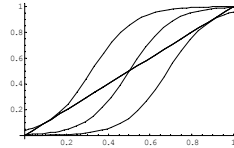


distribution des préférences autour de la moyenne  $h$

$$f(z) = \frac{\beta}{2 \cosh^2 z}$$

avec:  $\sigma^2 = \frac{\pi^2}{3\beta^2}$

Aggregate demand may have two stable fixed point for high  $\beta \Leftrightarrow$  low  $\sigma$ ; (here  $\beta = 20$ )



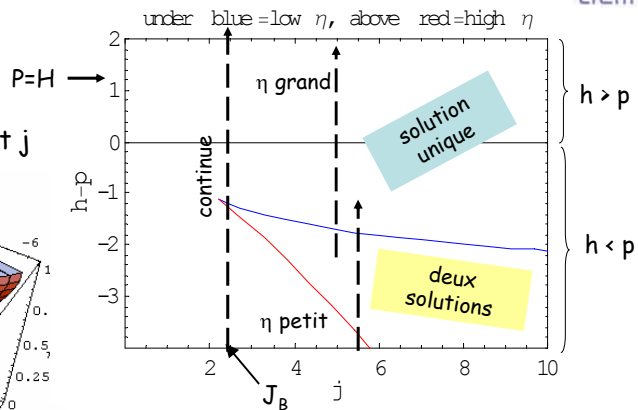
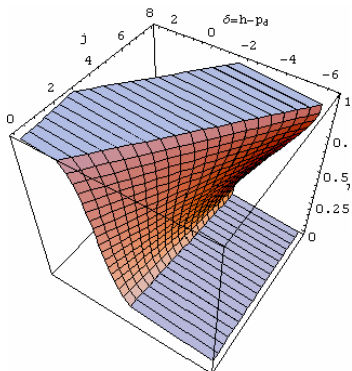
$$\eta_e = \int_{z_m(\eta_e)}^{\infty} dF(z) = 1 - \int_{-\infty}^{z(\eta_e)} dF(z) = 1 - F(z(\eta_e))$$

$$F(z) = \frac{1}{1 + \exp(\beta z)} \quad z_m(\eta_e) = p - h - j \cdot \eta_e$$

# fraction d'adopteurs et diagramme de phases



en fonction de  $h - p$ , et  $j$

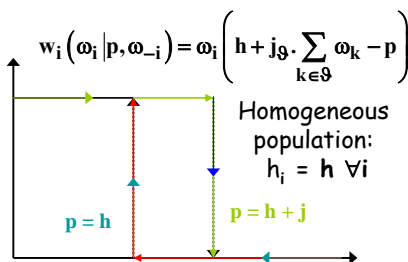


Source : M.B Gordon (Agay 2004)

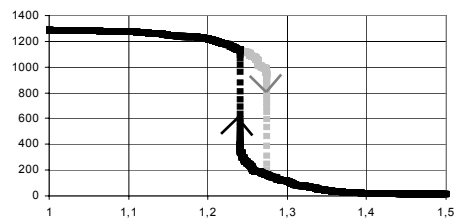
[http://perso.univ-rennes1.fr/denis.phan/AgayComplexeSHS/mgdocs/choix\\_discrets\\_III.pdf](http://perso.univ-rennes1.fr/denis.phan/AgayComplexeSHS/mgdocs/choix_discrets_III.pdf)

## 4 - Trade-off prix-quantités :

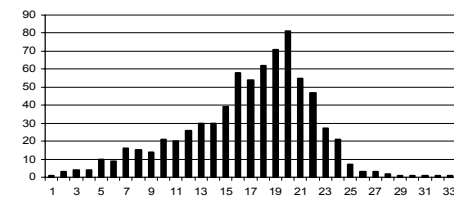
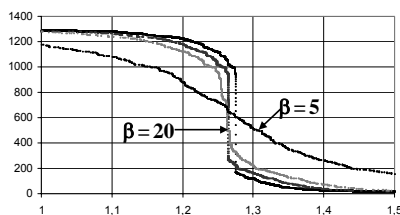
## Chain effect, avalanches and hysteresis



First order transition (strong connectivity)

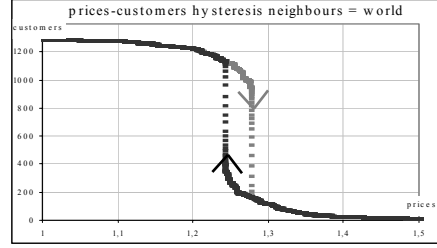
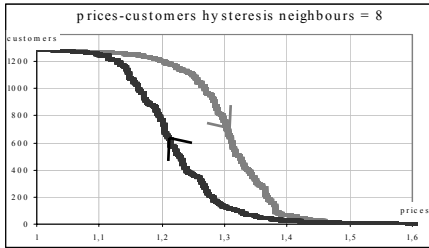


Chronology and sizes of induced adoptions in the avalanche when decrease from 1.2408 to 1.2407

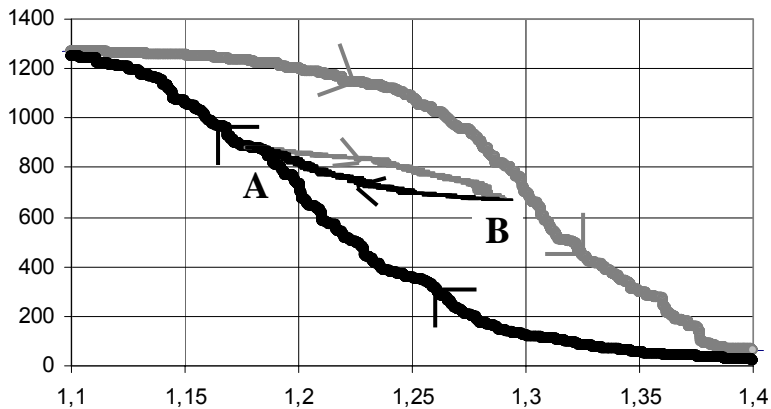




# hysteresis in the demand: connectivity effect



# Sethna inner hysteresis in the demand



(neighbourhood = 8,  $H = 1$ ,  $J = 0.5$ ,  $\beta = 10$ ) - Sub trajectory : [1,18-1,29]

## Préférences stochastiques (main tremblante logistique - *quantal* réponse)



$$P(\omega_i = 1 | \tilde{\eta}_a) = P(\varepsilon_i \leq v_i(\tilde{\eta}_a)) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta \cdot v_i)} \quad P(\omega_i | \tilde{\eta}_a) = \frac{\exp(\omega_i \cdot \beta \cdot v_i)}{1 + \exp(\beta \cdot v_i)}$$

$$v_i(\tilde{\eta}_a) = h_i - p + j \cdot \tilde{\eta}_a$$

Loi de Gibbs :

$$P(\vec{\omega} | \tilde{\eta}_a) \equiv \prod_i P(\omega_i | \tilde{\eta}_a) = \prod_i \frac{\exp(\omega_i \cdot \beta \cdot v_i)}{1 + \exp(\beta \cdot v_i)} \quad \vec{\omega} \equiv (\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_N)$$

- On montre que le processus stochastique de « main tremblante » est ergodique.
- A partir des probabilités de transition, il est possible de calculer numériquement la distribution invariante du processus stationnaire.
- On peut aussi étudier les propriétés analytiques de cette distribution grâce à l'approximation au dérivées partielle de Fokker-Plank
- (cf Annexe B, Weidlich et Haag, 1983, Orléan, 2002).



Optimum asymptotique (statique) du  
monopole et régimes de profit :  
le « dilemme du vendeur »

• hypothèses :

- Achats répétés
- il connaît le modèle du consommateur :  $h, j$  et  $f(z)$
- il a un coût de production constant (normalisé à  $c=0$ )
- il fixe le prix de façon à maximiser son profit

$$\Pi = N \eta p$$

- compte tenu que  $N\eta$  est le nombre de consommateurs qui achètent ( $\omega_i=1$ ) au prix  $P$
- maximisation sous la condition que  $\eta$  satisfait la demande du consommateur

$$\max_p \left( \frac{\Pi}{N} \right) = \max_p (\eta p)$$

$$\eta = 1 - \underbrace{F(z_m(\eta))}_{G(z)}$$

## Analytical results in the simplest case:

### Demand Side

In this case, each agent observes only the aggregate rate of adoption,  $\eta$

Let  $\theta_m$  the marginal consumer:  $V_m = 0$

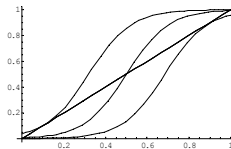
$$\eta = 1 - F(z_m(\eta));$$

$$\text{with : } z_m(\eta) \equiv p - h - j \cdot \eta$$

for large populations. With  $F$  logistic :

$$\eta = \frac{1}{1 + \exp(+\beta \cdot z)}$$

Aggregate demand may have two fixed point for high  $\beta \Leftrightarrow$  low  $\sigma$  ; (here  $\beta = 20$ )



### Supply Side

Optimal pricing by a monopolist in situation of risk

$$\max_p \Pi(p) = p \cdot [1 - F(p - h - j \cdot \eta(p))]$$

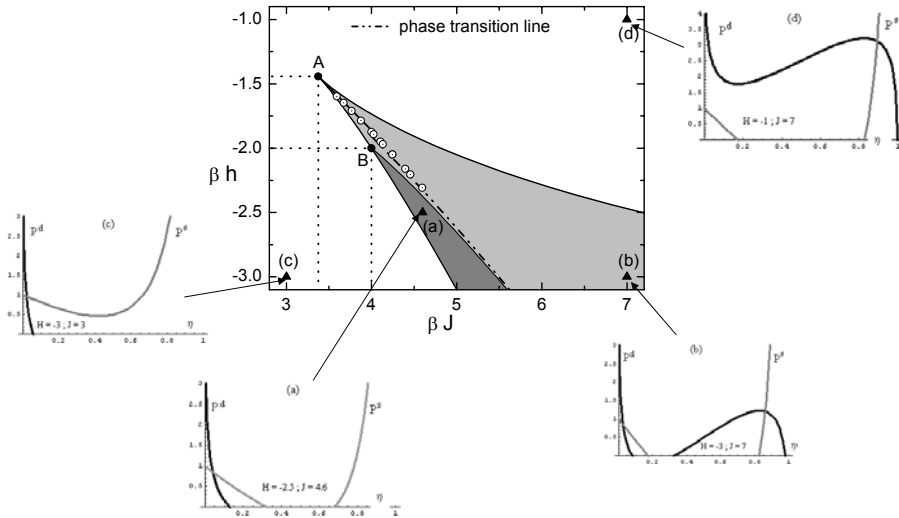
Optimum / implicit derivation gives (inverse) *supply curve* :

$$\frac{d\eta}{dp} = \frac{-f(z)}{1 - j \cdot f(z)} = \frac{-\eta}{p}$$

$$p^s(\eta) = \frac{1}{\beta \cdot (1 - \eta)} - j \cdot \eta$$

- $h > 0$  : only one solution
- $h < 0$  : two solutions ; results depends on  $\beta, j \rightarrow$

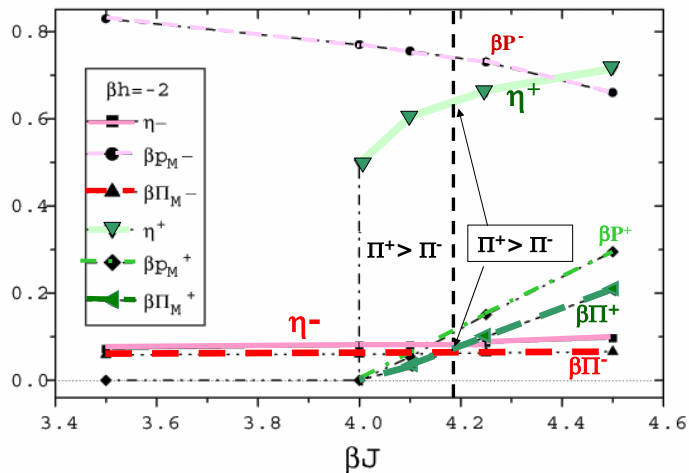
• diagramme de phases du monopoliste :



## Phase diagram & profit regime transition

Full discussion of phase diagram in the plane  $\beta J, \beta h$ , and numerically calculated solutions are presented in:

Nadal *et al.*, 2003



## Références



- Nadal JP, Phan D, Gordon MB, Vannimenus J.(2003) Monopoly Market with Externality: an Analysis with Statistical Physics and Agent Based Computational Economics, WEHIA 2003, Kiel, May 29-31 2003. [http://arxiv.org/PS\\_cache/cond-mat/pdf/0311/0311096.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/cond-mat/pdf/0311/0311096.pdf)
- Phan D Pajot S, Nadal JP (2003) The Monopolist's Market with Discrete Choices and Network Externality Revisited: Small-Worlds, Phase Transition and Avalanches in an ACE Framework *9th annual meeting of the Society of Computational Economics*, University of Washington, Seattle, USA, July 11 - 13, 2003
- Phan D , Gordon M B. and Nadal JP (2004) Social interactions in economic theory: an insight from statistical mechanics in *Cognitive Economics*, Bourguine and Nadal eds, Springer  
<http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/2003/Cahier85/ResumCahier85.html>
- Gordon M. B. (2004) An introduction to statistical mechanics, *Cognitive Economics*, Bourguine et Nadal eds, Springer  
<http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/2002/Cahier66/ResumCahier66.html>
- Gordon MB, Nadal JP, Phan D, Vannimenus J. (2005) Monopoly Market with Externalities analysis of a simple model, à paraître *Physica A*



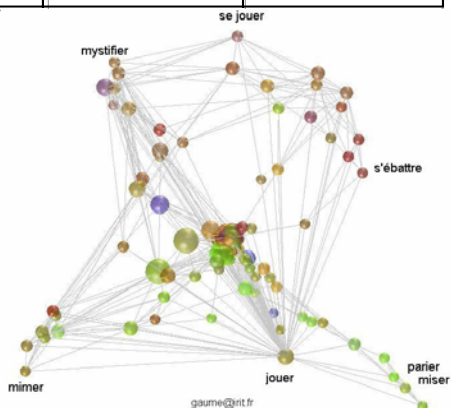
« Voisinages » et structures de réseaux

## Des réseaux réguliers aux réseaux aléatoires en passant par les « petits mondes » (2)



Quelques réseaux « réels »

	Kevin Bacon G.	W.S.Power Grid	C.Elegans Graph
$n$ number of vertices (agents)	225 226	4941	282
$\langle k \rangle$ average connectivity	61	267	14
$L$ characteristic path length	3,65	18,7	2,65



février 2005

denis.phan@univ-rennes1.fr

27

## Des réseaux réguliers aux réseaux aléatoires en passant par les « petits mondes » (3)



- **Distance** entre deux nœuds : nombre de liens composant le **chemin le plus court** ;  $l$  = **distance moyenne**
  - Dans un **réseau régulier** de dimension  $d$  et  $N$  sites, la distance  $l$  est de l'ordre de grandeur de la taille du système :  $l \sim N^{1/d}$
  - Dans un **réseau aléatoire poissonnien** de connectivité moyenne  $k$  on a :  $l \sim \log N$
  - Dans un **réseau complètement connecté** on a :  $l = 1$  !
  - Sur un réseau régulier, il n'y a pas de raccourci et pour aller d'un point  $A$  à un point  $B$ , il faut passer par tous les points intermédiaires.
  - Sur le graphe aléatoire on peut relier deux sites par un chemin très court
  - **Coefficient de clustering  $C$**  : la moyenne du rapport du nombre de liens entre les voisins d'un point donné sur le nombre de liens maximal
- Réseau complet : 1, aléatoire  $\langle k \rangle / (N-1) \sim 1/N$

Amaral, Scala, Barthélemy, Stanley « Classes of Small-world Networks », *PNAS* 97, 11149 (2000)

février 2005

denis.phan@univ-rennes1.fr

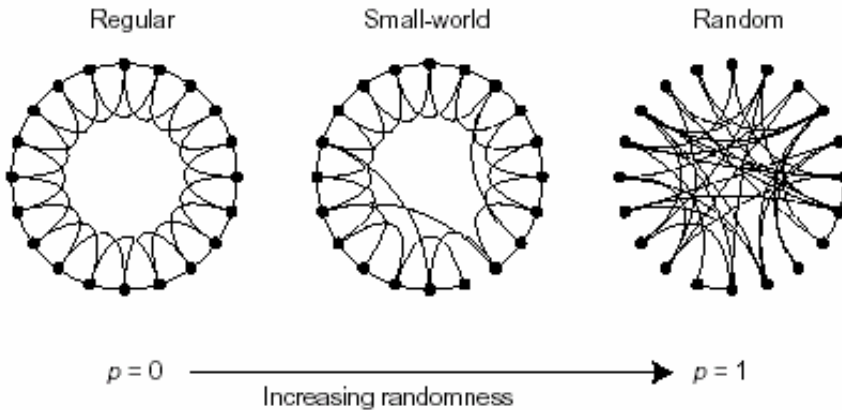
28

Des réseaux réguliers aux réseaux aléatoires en passant par les « petits mondes » (4)



• Petits mondes « à la Watts- Strogatz »

- En partant du *réseau régulier*, on reconnecte au hasard une proportion  $p$  de liens. On va donc du réseau régulier à  $p = 0$  pour arriver au graphe aléatoire à  $p = 1$



Watts, Strogatz (1998) « Collective Dynamics of Small-World Networks », *Nature*, 393, 440.

Des réseaux réguliers aux réseaux aléatoires en passant par les « petits mondes » (5)



• Scale free : petits mondes « à la Barabasi »

- diamètre faible ( $\propto \log N$ )
- coefficient de clustering faible  $C \sim 1/N$

$$P_{i \rightarrow j} = \frac{k_j}{\sum_k k}$$

• (ie attachement préférentiel)

• Distribution de probabilité d'un réseau « scale-free » obtenu par *attachement préférentiel*. On observe bien la loi de puissance avec un exposant  $\gamma = 3$ .

• Source : Barthelemy M. (2003) Classes de réseaux petits monde Doc. ENST de Bretagne

• ref : Barabási Albert, « Emergence of Scaling in Random Networks », *Science*, 286, 509

