

Choix binaires avec influences sociales : mode d'emploi et conséquences économiques

Denis Phan*

* CREM UMR CNRS 6211, Université de Rennes 1

22/03/2005

Résumé :

Cette note propose une synthèse de quelques travaux consacrés à l'étude de l'introduction d'*influences sociales* dans le modèle de décision individuelle le plus simple possible : le modèle de choix binaire. Pour explorer cette question, une approche computationnelle (*ACE : Agent based Computational Economics*) vient compléter les résultats analytiques. La note souligne de quelle manière la connaissance de certaines propriétés génériques de la mécanique statistique et de l'étude des systèmes complexes peut améliorer notre perception des mécanismes de choix dans de nombreuses situations où les décisions individuelles sont interdépendantes. Plus spécifiquement, la note présente les propriétés génériques d'un système composé d'un ensemble d'agents dont les choix sont influencés par ceux de leurs « voisins » dans une structure résiliaire. Elle propose ensuite une interprétation de ces choix individuels en termes de « jeux de population » (Phan, Waldeck, 2005). La caractérisation des équilibres du système et des dynamiques transitoires que l'on peut y associer est éclairée par la référence à des phénomènes classiques de la physique des systèmes désordonnés tels que : *transitions de phase, avalanches, hystérésis* (Phan et al, 2003, 2004). On insistera en particulier sur la coexistence de deux équilibres stables du système, lorsque les effets d'influence sociale sont particulièrement forts et que les déterminants indépendants de l'influence sociale traduisent une faible attractivité pour l'un des choix. Cette propriété, illustré dans le cas simple (mais dégénéré) d'une distribution uniforme (Gordon *et al*, 2005) caractérise ce type de système de manière très générale pour de nombreuses distributions statistiques monomodales (Nadal *et al*, 2005). Les conséquences économiques des propriétés d'un tel système sont illustrées dans le cas d'achats répétés par des agents aux préférences hétérogènes sur un marché monopolistique. On montre en particulier qu'il existe deux régimes de profit optimal à long terme pour le vendeur relativement à l'intensité de l'influence sociale. Ces régimes sont séparés par une « transition de phase ». L'un d'eux est caractérisé par des prix élevés et un petit nombre de clients et l'autre par des prix bas et un grand nombre de clients.

Mots clef: *Agent-based Computational Economics*, avalanches, choix discrets, hystérésis, influence sociale, marchés, réseaux sociaux, système complexe adaptatifs, transitions de phase.

Choix binaires avec influences sociales : mode d'emploi et conséquences économiques

Denis Phan*

* CREM UMR CNRS 6211, Université de Rennes 1

Depuis le début des années quatre-vingt-dix, les modèles de choix individuels qui intègrent l'effet des interdépendances sociales selon une formalisation inspirée de la mécanique statistique connaissent un développement croissant. On peut trouver, parmi d'autres, des revues de cette littérature dans deux chapitres de l'ouvrage du *Santa Fe Institute* consacré à l'économie considérée comme un système complexe évolutif (Arthur *et al.*, 1997). Ceux-ci sont rédigés respectivement par Durlauf (1997) et Ioannides (1997), pionniers en la matière. Des éléments complémentaires sont également proposés dans le même ouvrage par Kirman (1997a). Phan, *et al.* (2003a) proposent également une synthèse sur ces modèles d'influence sociale, complétée par une discussion des risques et des opportunités liés à la transposition des modèles de la physique statistique à l'économie (sur cette dernière question, cf. également Durlauf, 1999).

Cet article présente certains effets de l'introduction d'externalités localisées dans des *structures d'interaction* sur les propriétés locales ou globales du modèle de marché le plus simple : le modèle de choix discret (Anderson *et al.*, 1992) avec produit homogène et vendeur unique (monopole de Cournot). En présence d'influences sociales localisées qui viennent affecter les choix des agents, le marché correspondant peut être vu, suivant Kirman (1997a, 1997b, 1998, 2003), comme un *système complexe interactif reposant sur un réseau de communication*. Les résultats présentés ici s'appuient principalement sur Phan, Pajot, Nadal (2003b), mais les caractéristiques générales de ce modèle sont également discutées dans Nadal *et al.* (2003), Phan *et al.* (2003a) et Vannemini *et al.* (2003). Une approche computationnelle basée sur les agents (ACE - cf. par exemple Tesfatsion, 1997, 2001, 2002) nous permet d'explorer la trajectoire des équilibres de marché à prix donnés et les dynamiques transitoires entre ces positions d'équilibres (comme les avalanches). Le recours aux formalismes génériques de la *dynamique des systèmes complexes adaptatifs* nous permettra de souligner l'intérêt d'une telle approche pour la compréhension des marchés. Plus précisément, nous développons certaines analogies entre les dynamiques de marché ainsi simulées et les phénomènes classiques étudiés par la physique des systèmes désordonnés : *transition de phase, rupture de symétrie et avalanches* (Anderson, Stein, 1983 ; Galam, 2003).

1. Les choix individuels dans leur contexte social.

1.1. Du côté des agents : hétérogénéité idiosyncrasique et interactive.

Dans notre modèle, on considère une population de N agents (un ensemble d'agent I_N). Chaque agent $i \in I_N$ fait face de manière répétée à un choix binaire tel que : acheter ($\omega_i = 1$) ou ne pas acheter ($\omega_i = 0$) une unité d'un bien donné, participer ou pas à une activité collective, et plus généralement choisir entre les deux branches d'une alternative. Pour rester général, nous considérerons que les agents « adoptent » la stratégie S_1 ($\omega_i = 1$) ou ne l'adoptent pas ($\omega_i = 0$, stratégie S_0), indépendamment de la signification possible de ces stratégies. Les agents sont supposés maximiser une fonction de surplus $V_i(\omega_i | P, \tilde{\omega}_{-i})$ quasi-linéaire, conditionnellement à des variables exogènes ou anticipées. Ce surplus comprend une composante « privée » : $(H_i - P)$ et une composante « sociale » : $S(\omega_i, \tilde{\omega}_{-i})$.

$$(1.1) \quad W_i(\omega_i | P, \tilde{\omega}_{-i}) \equiv \max_{\omega_i \in \{0,1\}} \{ \omega_i \cdot V_i(\omega_i | P, \tilde{\omega}_{-i}) \} \quad V_i(\omega_i | P, \tilde{\omega}_{-i}) = (H_i - P) + S(\omega_i, \tilde{\omega}_{-i})$$

La *composante privée* comprend l'ensemble des déterminants de la décision qui ne dépendent pas directement des choix d'autres agents. P représente une variable exogène commune à tous les agents que l'on interprétera comme le coût associé à la stratégie S_1 ($\omega_i = 1$). Par souci de clarté de l'exposition, nous décomposerons H_i en une composante H , commune à tous les agents et en une composante idiosyncrasique θ_i qui représente la diversité des goûts entre les agents. La variable aléatoire θ dont la composante idiosyncrasique θ_i est le tirage qui caractérise l'agent i sera supposée distribuée de manière indépendante entre les agents suivant la même loi de probabilité de moyenne nulle, avec une densité $f_1(\theta)$, avec une fonction de répartition $F_1(\theta)$.

$$(1.2) \quad H_i = H + \theta_i \quad \text{avec :} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_N \theta_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_N H_i = H$$

La *composante sociale* (ou interactive) résulte de la prise en compte par chaque agent des choix anticipés (ou observés) d'un certain nombre d'autres agents définis comme le « voisinage » de l'agent i : soit $\mathcal{G}_i \subset I_N$ l'ensemble des voisins de l'agent i . Dans la mesure où les voisins de i ont eux même des voisins, les relations qui lient un agent avec ses voisins peuvent être vues comme des éléments constitutifs d'un « réseau social ». On désigne par $\tilde{\omega}_{-i} \equiv (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_k, \dots, \tilde{\omega}_{\mathcal{G}_i})$, avec : $k \in \mathcal{G}_i$ le vecteur des choix (anticipés) dans le voisinage de l'agent i . On supposera dans ce qui suit que l'effet cumulé des choix anticipés dans le voisinage ($\tilde{\omega}_{-i}$) est additif et que l'effet marginal de chaque choix est non négatif. Si l'on désigne par le coefficient j_{ik} l'effet marginal sur la disposition à adopter de l'influence sociale de l'agent k sur l'agent i , on a : $j_{ik} > 0$, $\forall k \in \mathcal{G}_i$. Durlauf (1997) souligne que l'on se trouve dans une situation de *complementarité stratégique* au sens de Bulow, Geanakoplos, Klemperer, 1985 (cf. également Cooper, John, 1988). Formellement, si les variables de choix étaient

continues et que la fonction $S(\omega_i, \tilde{\omega}_{-i})$ était C2, on devrait alors avoir :

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 S(\omega_i, \tilde{\omega}_{-i})}{\partial \omega_i \partial \tilde{\omega}_k} = j_{ik} > 0$$

La spécification la plus simple de l'effet d'influence sociale est alors :

$$(1.4) \quad S(\omega_i, \tilde{\omega}_{-i}) = \omega_i \sum_{k \in \mathcal{G}_i} j_{ik} \tilde{\omega}_k$$

Où, $\tilde{\omega}_k$ représente le choix anticipé de l'agent k . Dans le cas le plus simple des anticipations « myopes » le choix anticipé correspond au choix observé dans la dernière période et l'on a : $\tilde{\omega}_k(t) = \omega_k(t-1)$. D'autres spécifications pourraient conduire au même effet marginal. Par exemple, le modèle (négatif et quadratique) de « conformité » de Bernheim (1994) vérifie la condition (1.3) et conduit donc à des choix équivalents (Durlauf 1997, Phan *et al.*, 2003a). En effet, si l'on opère le changement de variable : $s_i = (2\omega_i - 1)$, on a : $s_i = +1$ quand : $\omega_i = 1$ et : $s_i = -1$ quand : $\omega_i = 0$, on a :

$$(1.5) \quad S(s_i, \tilde{s}_{-i}) = - \sum_{k \in \mathcal{G}_i} \frac{j_{ik}}{2} (s_i - \tilde{s}_k)^2 = \sum_{k \in \mathcal{G}_i} j_{ik} s_i \tilde{s}_k - \sum_{k \in \mathcal{G}_i} j_{ik}$$

Les composantes « privées » et « sociales » traduisent respectivement une *hétérogénéité idiosyncrasique*, due à la diversité des H_i (θ_i) et une *hétérogénéité interactive* (ou sociale), due au choix de l'agent relativement aux choix anticipés (ou observés) dans son voisinage dans le réseau social. La dépendance entre ces deux formes d'hétérogénéité prend alors la forme d'un « champ aléatoire ». Lorsque les valeurs des θ_i sont distribuées initialement au hasard, mais ne changent pas durant la période considérée, ce champ aléatoire correspond à un désordre « gelé » dans le langage des physiciens. Lorsque l'on introduit dans la fonction de surplus des agents un terme stochastique supplémentaire qui varie durant la période considérée, le désordre est qualifié de « recuit » par les physiciens. Ce terme stochastique, introduit initialement par Blume (1993) pour cette classe de modèle peut être interprété comme une « main tremblante » ou comme une modalité particulière d'apprentissage (Baron *et al.*, 2004). De nombreux modèles présentés par exemple par Durlauf (1997) ou Ionnides (1997) reposent sur cette dimension stochastique qui sera introduite en section 4. Dans ce cas (avec quelques hypothèses complémentaires, comme la symétrie des effets), lorsque le voisinage reste local, on se trouve en présence d'un champ aléatoire markovien (Kinderman, Snell, 1982) car on peut montrer que : $P(\omega_i | \omega_k, \forall k \neq i, k \in I_N) = P(\omega_i | \omega_k, \forall k \neq i, k \in \mathcal{G}_i)$.

Dans le cadre plus restreint des choix discrets sans externalités, Anderson *et al.*, (1992) discutent de ces deux catégories de modèles. Ils relient le cas du *désordre gelé* à l'approche de Mc Fadden (1974), où les préférences des agents sont fixées, mais non observables, seule leur loi étant connue (situation de « risque » du point de vue de la théorie de la décision). Le cas *désordre recuit* est

rattaché aux expériences psychologiques de Thurstone (1927). Les deux rapprochements justifient pour ces auteurs l'usage d'une loi logistique, comme on le verra plus loin. On consultera Durlauf, 1999 et Nadal *et al.* (2003) pour une interprétation en termes de physique statistique de ces hypothèses et l'analyse des conséquences économiques.

Dans ce qui suit, on suppose que les interactions locales sont symétriques, homogènes et positives sur un réseau régulier, donc : $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}$ et $j_{ik} = j_{i\mathcal{G}} > 0$, tout $k \in \mathcal{G}_i$ et pour tout $i \in \Omega_N$, (tous les paramètres d'influence sociale). Si l'on prend un voisin k quelconque ($k \in \mathcal{G}$), dans un voisinage donné de taille $N_{\mathcal{G}}$, son influence (sociale) sur l'agent i sera : j si le voisin a adopté ($\omega_k = 1$). Cette influence sera nulle s'il n'a pas adopté ($\omega_k = 0$). L'influence sociale totale dépend ainsi de la *proportion* $\tilde{\eta}_{\mathcal{G}}$ d'adopteurs anticipée (ou observés) dans le voisinage :

$$(1.6) \quad \tilde{\eta}_{\mathcal{G}} \equiv \sum_{k \in \mathcal{G}} \tilde{\omega}_k / N_{\mathcal{G}} \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{\mathcal{G}} \equiv \sum_{k \in \mathcal{G}} \omega_k / N_{\mathcal{G}}$$

1.2. L'interprétation des choix individuels du point de vue d'un jeu de population.

Comme le surplus de chaque agent dépend des décisions des autres agents (ou des anticipations qu'il peut en faire), on peut dire que chaque agent se trouve en situation d'interaction non coopérative avec les autres agents de son voisinage. Il est intéressant de ce point de vue, de réinterpréter le modèle en termes de jeux de population (Blume, 1997). Comme le rappelle opportunément Blume, à la suite de Weibull (1995), la notion de « stratégie mixte » a reçu de la part de Nash deux interprétations possible, dont une « populationniste » dite « *mass-action* », qui ne nécessite juste les agents jouent leur meilleure réponse face au « membre moyen » d'une population de référence :

“It is unnecessary to assume that the participants have full knowledge of the total structure of the game, or the ability and inclination to go through any complex reasoning process. But the participants are supposed to accumulate empirical information on the relative advantage of the various pure strategies at their disposal” (Nash, 1950, p.21-22 cité par Weibull, 1995 et Blume, 1997).

Les agents ont ici deux stratégies pures à leur disposition notées respectivement S_1 ($\omega_i = 1$) et S_2 ($\omega_i = 0$). Sous ces hypothèses, le choix optimal (conditionnellement à ses anticipations) d'un agent correspond à sa *meilleure réponse* face à un agent fictif qui jouerait une stratégie mixte $\tilde{\eta}_{\mathcal{G}}$ qui résume les anticipations de choix dans le voisinage. Lorsque l'agent joue *itérativement le même jeu avec tous ses voisins* cette règle de décision permet de maximiser son surplus *moyen*, conditionnellement à la proportion d'adopteurs anticipée (ou observée) dans son voisinage. On remarquera que si l'agent jouait itérativement ce jeu avec un de ses voisins tiré au hasard, cette règle de décision lui permettrait de maximiser son *espérance* de surplus.

$$(1.7) \quad \begin{aligned} w_i(\omega_i | p, \tilde{\eta}_g) &\equiv W_i(\omega_i | P, \tilde{\omega}_{-i}) / N_g = \max_{\omega_i \in \{0,1\}} \left\{ \omega_i (h_i - p + j \cdot \tilde{\eta}_g) \right\} \\ &\Leftrightarrow \omega^*(p, \tilde{\eta}_g) \in \arg \max_{\omega_i \in \{0,1\}} \left\{ \omega_i (h_i - p + j \cdot \tilde{\eta}_g) \right\} \end{aligned}$$

Où : $h_i \equiv H_i / N_g$, et $p \equiv P / N_g$. On peut donc écrire sous forme normale la matrice des gains d'un agent lors d'une des confrontations bilatérales de ce jeu de population (Figure 1)

Figure 1: matrice des gains de l'agent i lors d'une confrontation avec un agent k de son voisinage

	$S_0(k): \omega_k = 0$	$S_1(k): \omega_k = 1$
$S_0(i): \omega_i = 0$	0	0
$S_1(i): \omega_i = 1$	$h_i - p$	$h_i - p + j$

Joueur i en ligne / Joueur k en colonne

Si $h_i > p$ la stratégie S_1 ($\omega_i = 1$) est strictement dominante, l'agent considéré adoptera toujours quelque soit le comportement de ses voisins. Si $h_i < p - j$ (et donc : $h_i < p$), la stratégie S_1 est strictement dominée et donc l'agent considéré n'adoptera jamais quelque soit le comportement de ses voisins. Pour : $p > h_i > p - j$, l'agent se trouvera en situation de recherche de coordination, car sa meilleure réponse dépend des choix de son voisinage. Conformément à Monderer, Shapley, (1996) on peut présenter le jeu de coordination issu de la figure 1, sous la forme d'un jeu « potentiel », qui conserve la structure de meilleure réponse. Pour : $p > h_i > p - j$, la figure 2 permet de présenter le jeu comme un problème de « pure coordination » (où les gains diagonaux correspondant à la non coordination sur la même stratégie sont nuls).

Figure 2: matrice du jeu potentiel quand : $p > h_i > p - j$

	$S_0(k): \omega_k = 0$	$S_1(k): \omega_k = 1$
$S_0(i): \omega_i = 0$	$p - h_i$	0
$S_1(i): \omega_i = 1$	0	$h_i - p + j$

Joueur i en ligne / Joueur k en colonne

Dans le cadre des jeux stochastique, il a été montré que le seul état stochastiquement stable au sens de Foster et Young () dans ce jeu de coordination était celui qui maximisait ce jeu de potentiel (Cf. par exemple : Blume 1997, Young 1998, Baron *et al.*, 2004 et section 4). En restant pour l'instant dans un cadre déterministe, on peut s'inspirer du critère de « risque dominance » proposé par

Harsanyi, Selten 1988, pour des jeux conventionnels, afin d'évaluer les propriétés respectives de deux équilibres de Nash de ce jeu de coordination. Ainsi, la coordination sur la stratégie de non adoption ($\omega_i = 0$) est dite individuellement « *risque dominante* » chez les agents pour lesquels il est plus coûteux (risqué) de dévier unilatéralement de cette stratégie, c'est-à-dire ceux tels que :

$$(1.8) \quad (p - h_i) > j/2 \quad \Leftrightarrow \quad (p - j/2) > h_i$$

Pour un taux d'adoption anticipé (ou observé) $\tilde{\eta}_g$ (η_g) dans son voisinage, un agent qui applique la règle de décision de « meilleure réponse » adoptera si l'espérance de gain de S_1 face à ce taux d'adoption est supérieure à celle de S_2

$$(1.9) \quad \pi(S_1, \tilde{\eta}_g) > \pi(S_0, \tilde{\eta}_g) \quad \Leftrightarrow \quad (h_i - p + f) \cdot \tilde{\eta}_g > (p - h_i) \cdot (1 - \tilde{\eta}_g)$$

Et donc, conformément à (1.7) si :

$$(1.10) \quad h_i + j \cdot \tilde{\eta}_g > p$$

En résumé, on a donc 4 types d'agents :

- Ceux avec : $h_i > p$ adopteront toujours, quelque soit le taux d'adoption dans le voisinage. En effet, S_1 est une stratégie strictement dominante pour tout $\tilde{\eta}_g \in [0, 1]$. S_1 est donc la meilleure réponse contre toute combinaison convexe de S_0 et S_1 (pour tous les taux d'adoption dans le voisinage : $0 \leq \tilde{\eta}_g < 1$).
- Ceux avec : $p \geq h_i > (p - j/2)$ pour qui la stratégie Pareto dominante est aussi risque dominante, adopteront pour tout $\tilde{\eta}_g > (p - h_i)/j > 0$
- Ceux avec : $(p - j/2) \geq h_i > (p - j)$ pour qui la stratégie Pareto dominante est risque dominée n'adopteront que si : $\tilde{\eta}_g \geq (p - h_i)/j \geq 1/2$
- Ceux avec : $h_i \leq (p - j)$ n'adopteront jamais, quelque soit le taux d'adoption dans le voisinage. En effet, S_1 est une stratégie strictement dominée pour tout $\tilde{\eta}_g \in [0, 1]$. S_0 est donc la meilleure réponse contre toute combinaison convexe de S_0 et S_1 (pour tous les taux d'adoption dans le voisinage : $0 \leq \tilde{\eta}_g < 1$).

En résumé, l'approche par les jeux de populations nous permet de présenter le seuil individuel d'adoption d'un agent comme le résultat de sa règle de décision de meilleure réponse conditionnellement à un taux anticipé (ou observé) d'adoption dans son voisinage. Pour une valeur de p donnée, on peut ranger les agents dans trois catégories, en fonction de leur disposition idiosyncrasique à adopter (IWA pour *Idiosyncratic Willingness to Adopt* en anglais). Ceux qui adopteront indépendamment du choix des autres ($h_i > p$), ceux qui n'adopteront jamais : $h_i \leq p - j$ et ceux dont le seuil d'adoption dépend du taux d'adoption anticipé (ou observé) dans leur voisinage.

Cette dernière sous population peut encore être séparée en deux sous ensemble autour d'un seuil critique égal à la moitié de l'intensité de l'influence sociale marginale ($j/2$). Ce seuil est indépendant de la distribution des IWA. Les agents tels que $0 \geq h_i - p > -j/2$ pourront adopter avec des taux $\tilde{\eta}_g$ d'adoption anticipé (ou observé) dans leur voisinage inférieurs à 50% alors que ceux pour lesquels : $-j/2 \geq h_i - p > -j$ n'adopteront que si ce taux est supérieur à 50%. On peut présenter cette partition d'une autre manière également utile en disant qu'il existe pour chaque agent une valeur seuil $p_{ni} = h_i + j/2$ telle que si p est inférieur à ce seuil l'agent adoptera même si le taux d'adoption anticipé est inférieur à 50%. En sommant cette valeur sur tous les agents, on obtient un seuil moyen : $p_n = h + j/2$. Pour $p < p_n$, il y aura donc un biais en faveur de l'adoption.

1.3. Effet direct et indirect d'une variation exogène de p : premier aperçu des phénomènes d'avalanche

Si l'on se place d'un point de vue dynamique, il est aussi intéressant de distinguer les effets « directs » et « indirects » d'une variation de la variable exogène p en t (par exemple : $p(t) < p(t-1)$). Par *effet direct*, on qualifiera les changements induits directement par le changement de p , indépendamment de tout changement dans le voisinage. Un *effet indirect*, qualifiera un changement induit, après une variation de p , dans les choix du voisinage. Pour illustrer simplement cette distinction, considérons le cas simple des anticipations myopes : $\tilde{\eta}_g(t+1) = \eta_g(t)$. Les agents qui sont concernés par un effet direct sont ceux qui *auraient eu* un surplus potentiel moyen v_i négatif si les prix n'avaient pas changé ($p(t) = p(t-1) \Rightarrow v_i(t) = h_i - p(t-1) + j\eta_g(t-1) \leq 0$) et qui *ont* un surplus moyen positif en t du fait de la baisse de p , indépendamment de l'effet de cette baisse sur l'adoption dans le voisinage $p(t) < p(t-1) \Rightarrow v_i(t) = h_i - p(t) + j\eta_g(t-1) > 0$

On qualifiera par opposition « *d'indirects* » (ou *induits*) les choix qui auront été motivés par la prise en compte des choix dans le voisinage, choix eux-mêmes attribuables directement ou indirectement au changement de p . Dans ce cas, on a : $v_i(t) = h_i - p(t) + j\eta_g(t-1) < 0$, mais la variation de l'effet d'influence sociale due aux réactions en chaîne vont conduire en $t+d$ le surplus à devenir positif à la suite d'une augmentation du taux d'adoption dans son voisinage : $\eta_g(t+d) > \eta_g(t-1)$, $\Rightarrow v_i(t+d) > 0$. Conformément à la terminologie utilisée par les physiciens et reprise par quelques économistes, nous désignerons par « avalanche » la dynamique transitoire qui résulte de ces réactions en chaîne entre deux équilibres (Bak, 1996 ; Steyer, 199X).

2. De l'individuel au collectif : une première approche de la dynamique globale associée à la règle de meilleure réponse dans le cas du désordre « gelé ».

Quand les choix individuels dépendent de l'influence sociale, deux type de dynamiques peuvent caractériser les phénomènes d'avalanche, selon que les effets d'influences sont localisés ou non dans un réseau.

Dans le cas de l'influence « globale », les agents prennent en compte uniquement le choix moyen, comme dans les modèles « synergétiques » inspirés de Weidlich et Haag (1982) utilisés en économie en particulier par Topol (1991) et Orléan (1990, 1998) (cf. également Aoki 1996 et Orléan, 2002, pour une présentation synthétique). Cette situation conduit à des résultats équivalents à l'approximation de « champs moyen » utilisé par les physiciens (Weisbusch, 1989). Remarquons que pour des populations suffisamment grandes, dans la spécification (1), ces interactions “globales” sont équivalentes au cas de la connectivité complète du réseau ($N_g = N-1$). En effet, avec notre hypothèse d'homogénéité : $j_{ik} = j_g$, chaque individu tend à être influencé avec la même intensité par le choix moyen des autres. Dans ce cas, l'effet de l'influence sociale s'exerce « comme si » le voisinage de chaque agent était composé de tous les autres agents. En conséquence, les dynamiques qui apparaissent au niveau des comportements agrégés, parmi lesquelles les avalanches, sont indépendantes de la topologie du réseau social. Dans le cas des influences localisées dans le réseau social, les interdépendances conduisent à des *avalanches localisées* dans le réseau en fonction de sa structure. On peut voir ainsi apparaître des *clusters* et des « zones gelées ».

2.1. Seuil individuels d'adoption et dynamique collective : le modèle d'émeute de Granovetter (1998)

On peut rapprocher cette classe de spécifications des modèles à seuil (individuels et collectifs) utilisés dans les sciences sociales (Granovetter, 1978 ; Schelling, 1978a, 1978b). Dans derniers, les choix individuels dépendent en effet explicitement de la proportion ou du nombre de personnes qui ont fait un choix similaire dans l'environnement de l'individu. Dans tous ces cas, le choix d'un seul agent peut conduire à travers une réaction en chaîne à des changements significatifs dans l'ensemble de la population. Dans ce qui suit, nous considérerons que les IWA sont fixés.

Dans son article de 1978 (références à la traduction française 2000), Granovetter se donne pour objectif de montrer que les comportements collectifs peuvent être expliqués au moyen « d'un modèle décrivant comment les préférences individuelles interagissent » (p.116). Il cherche en particulier à montrer comment « la variation des normes et des préférences à l'intérieur du groupe en interaction est le déterminant principal des situations finales observées » (id.). Il prend comme exemple l'adhésion d'individus à une émeute, ce qui lui permet de faire un parallèle avec les analyses proposées par Berck (1974) sur ce sujet à l'aide de la théorie des jeux. Il est intéressant de noter que Granovetter trouvait cette approche « très intéressante ». Il note même que la théorie des jeux permet d'analyser « les actions de multiples individus sous la forme d'un jeu à deux joueurs où un individu « joue » contre les autres pris collectivement » (p. 136). Cependant, il pensait aussi que la théorie de jeux ne pouvait pas être en mesure de formaliser son problème, dans la mesure où il croyait que celle-ci se restreignait à des « préférences identiques » et à des décisions simultanées (ibid.). Le point de vue des « jeux de populations » a précisément été introduit dans les années quatre-vingt dix pour traiter de problèmes dynamiques de sélection d'équilibre, dans des situations où les hypothèses

habituelles de la théorie des jeux conduisaient à des situations paradoxales (dilemme du prisonnier, équilibres multiples dans les jeux de coordination...) là où l'observation et/ou l'expérimentation (approche « comportementaliste » des jeux – Camerer, 2003) montraient que la coordination se réalisait bien dans la pratique (cf. également Schelling, 1960 avec sa notion de « saillance »). Dans l'approche des « jeux de population », l'hypothèse de « connaissance commune » est inutile à la sélection d'un équilibre. En particulier, le joueur a juste besoin d'avoir de l'information sur les stratégies jouées par les autres joueurs.

Pour revenir au modèle de Granovetter, les agents doivent choisir entre participer à une émeute et ne pas y participer. Il suppose « que les coûts et les bénéfices associés, pour chaque acteur, à l'un de ces deux comportements dépend en partie du nombre d'individus ayant déjà effectué l'un ou l'autre choix. Plus spécifiquement, il suppose surtout que « le coût de sa participation diminue lorsque la taille de l'émeute augmente » (p. 117). Il définit alors le *seuil de participation* comme « la proportion d'individus du groupe qui doivent avoir fait ce choix pour qu'il le fasse à son tour » (p.118. On remarquera que le modèle de Granovetter concerne un voisinage « global » et une grande population. Le taux de participation à l'émeute est défini par : $\eta_a \equiv N_a/N$ où N_a est le nombre de participants (d'adopteurs) dans la population. Pour N suffisamment grand, on a : $\eta_a \approx (N_a - 1)/(N - 1)$. Le modèle de Granovetter est également dynamique, mais les agents n'ont pas d'anticipations et observent seulement les émeutiers. Ceci correspond à des anticipations myopes dans notre formulation, c'est-à-dire : $\tilde{\eta}_a(t) = \eta_a(t-1)$. On peut finalement définir la stratégie de meilleure réponse de notre jeu de population qui correspond au modèle de Granovetter :

$$(2.1) \quad \omega^* \in \arg \max_{\omega_i \in 0,1} \left\{ \pi_i(\omega_i(t) | \eta_a(t-1)) \right\}$$

Conformément à (1.10), un agent choisira de participer en t si le « bénéfice » h_i attendu est supérieur au coût de la participation, supposé diminuer avec le nombre de participant observé en $t - 1$:

$$(2.2) \quad h_i > (p - j \cdot \eta_a(t-1))$$

On note que les « agitateurs » qui participeront quoi qu'il arrive (même si $\eta_a(0) = 0$) sont ceux qui ont un $h_i > p$. de même un agent qui aurait un $h_i \leq (p - j)$ ne participerait jamais à une émeute. La formule (2.2) peut alors se réécrire de manière à faire apparaître le *seuil de participation* de l'agent i :

$$(2.3) \quad \eta_a(t-1) > \eta_i \equiv \frac{(p - h_i)}{j}$$

Pour une valeur donnée de la participation en $t - 1$, on peut alors définir un agent « marginal » $h_m(t)$ au surplus nul en t et donc indifférent entre participer l'émeute ou ne pas y participer.

$$(2.4) \quad \eta_m(t) \equiv \frac{(p - h_m(t))}{j} = \eta_a(t-1)$$

En t , tous les individus qui ont un seuil de participation supérieur à $\eta_m(t)$ seront émeutiers. Ce sont aussi ceux qui ont un h_i compris entre la borne supérieure de la distribution h^+ et l'IWA marginal $h_m(t)$. Il est commode pour ce qui suit d'utiliser la variable aléatoire normalisée par la taille du voisinage (ici de la population) $z \equiv \theta / N$. On désignera donc par $z_i \equiv \theta_i / N = h_i - h$ la composante idiosyncrasique de l'IWA issue d'un tirage indépendante entre les agents et identiquement distribuée suivant une loi de probabilité de moyenne nulle, de densité $f_2(z)$, et de fonction de répartition $F_2(z)$. Conformément à l'équation (1.2) nous avons également :

$$(2.5) \quad h_i = h + z_i \quad \text{avec :} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_N z_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_N h_i = h$$

La nullité du surplus de l'agent agent « marginal » $h_m(t)$ nous permet de récrire la relation (2.4) inspirée de Granovetter comme :

$$(2.6) \quad z_m(\eta_a(t-1)) = p - h - j \cdot \eta_a(t-1)$$

Pour une valeur observée de $\eta_a(t-1)$, les agents qui participeront à l'émeute seront ceux qui ont un z_i supérieur à : $z_m(\eta_a(t-1))$. Le taux d'émeutier en t sera donc défini par la relation récurrente :

$$(2.7) \quad \eta_a(t) = P(\omega_i = 1 | \eta_a(t-1)) = P(z_i > z_m(\eta_a(t-1)))$$

$$\eta_a(t) = \int_{z_m(\eta_a(t-1))}^{\infty} dF(z)$$

La dynamique correspondante peut être facilement présentée avec une distribution uniforme de z mais reste valable pour de nombreuses classes de distributions unimodales. Prenons donc une loi uniforme symétrique centrée sur zéro (Gordon *et al.*, 2005) telle que :

$$(2.8) \quad f(z) = \frac{1}{2a} \text{ si : } -a \leq z \leq a \quad \text{et zéro sinon}$$

On obtient une relation de récurrence avec contraintes aux limites :

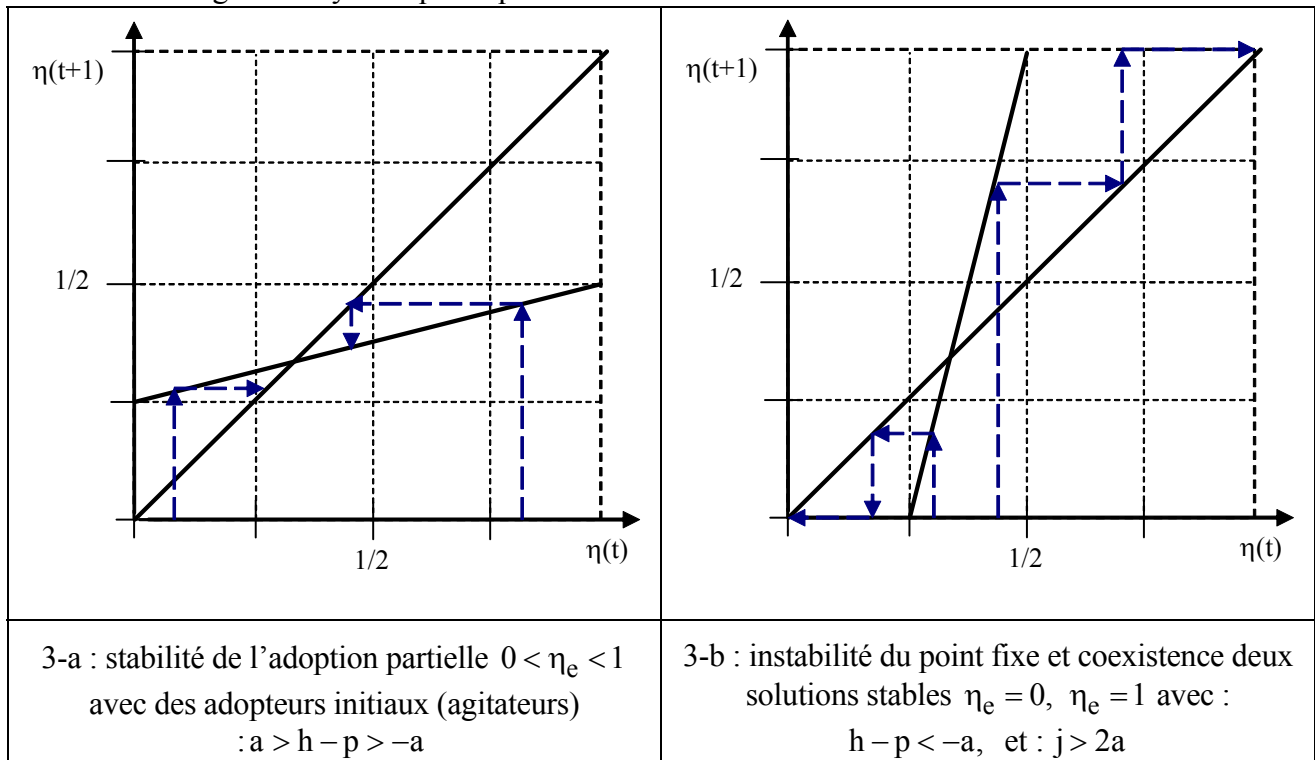
$$(2.9) \quad \eta_a(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{h-p}{2a} \right) + \frac{j \cdot \eta_a(t-1)}{2a} \quad 1 \geq \eta_a(t) \geq 0 \quad \forall t$$

La proportion initiale d'émeutiers avec l'hypothèse d'anticipations myopes est donnée par la probabilité d'avoir des agents tels que : $z_i > p - h$, ce qui correspond aux agents qui adoptent toujours, car : $h_i > p$.

$$(2.10) \quad \eta_a(0) = \inf \left\{ \sup \left\{ 0, \left(\frac{1}{2} + \frac{h-p}{2a} \right) \right\}, 1 \right\}$$

On notera que si : $h - p > a$, tout le monde adopte en $t = 0$: $\eta_a(0) = 1$. Inversement, si $h - p \leq -a$, la proportion initiale d'adopteurs sera nulle $\eta_a(0) = 0$, pour des anticipations myopes. Dans ce cas, seul un autre schéma d'anticipation plus « optimiste » pourrait permettre à l'émeute de démarrer sans « agitateurs ». Il est cependant intéressant d'un point de vue heuristique d'étudier la *stabilité* du processus (2.9) avec des initialisations « *ad hoc* » quelconque dans ce dernier cas (Figure 3-b). Ces conditions particulières aux bornes sont dues aux particularités de la distribution uniforme. On peut considérer que c'est le prix à payer pour obtenir des résultats analytiques très simples qui permettent de comprendre l'essentiel plus rapidement. Mais il s'agit d'un cas dégénéré, comme on le verra plus loin. Observons maintenant la dynamique séquentielle qui résulte de la relation de récurrence (2.9).

Figure 3 : dynamique séquentielle avec une distribution uniforme des IWA



2.2. Configuration des régimes d'équilibre dans le l'influence globale

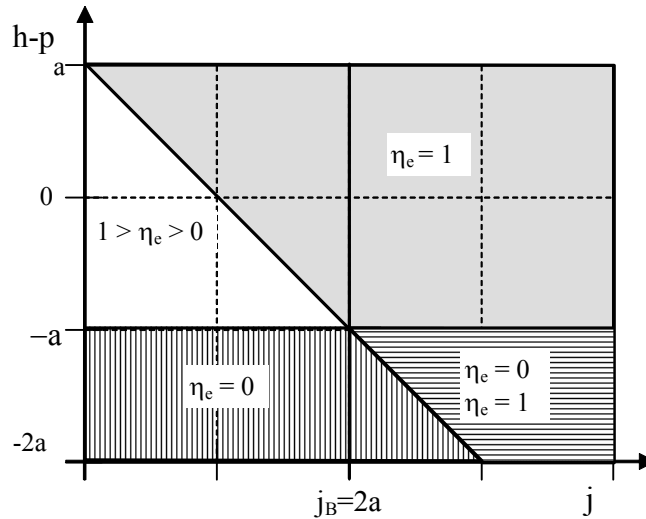
Les points fixes du processus (2.9) sont donnés par :

$$(2.11) \quad \eta_e = \inf \left\{ \sup \{ 0, \eta^* \}, 1 \right\} \quad \eta^* = \frac{a + h - p}{2a - j}$$

On peut représenter l'ensemble des régimes correspondants à différentes configuration des points fixes

stables (des équilibres) dans un diagramme de phases de l'espace $(h-p, j)$. La figure 4 fait ainsi apparaître 4 régimes différents. L'équation (2.11) fait apparaître une valeur critique $J_B=2a$, qui correspond pour les physiens à une « transition de phase » entre régime d'adoption (Gordon *et al.*, 2005).

Figure 4 : diagramme de phase des régimes d'équilibre dans le cas d'une distribution uniforme sur $[-a, a]$



Source : d'après Gordon *et al.*, 2005

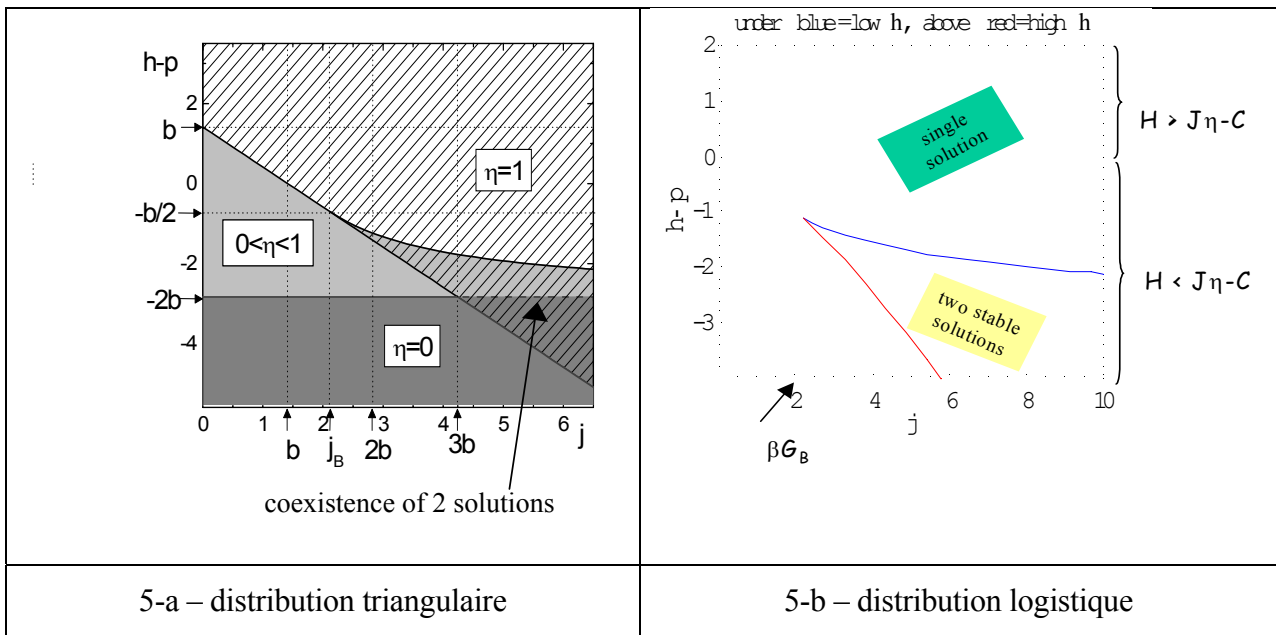
Pour $j < j_B$, (partie ouest de la Figure 6) le signe de n^* dépend uniquement du numérateur. Pour : $h-p < -a$, on a $n^* < 0$ et donc $\eta_e = 0$ (région sud-ouest avec les lignes verticales). Pour : $a > h-p > -a$, l'adoption n'est pas complète s'il existe des individus réfractaires, avec des $h+j-p < z_i$, ce qui est le cas lorsque $h-p < a-j$. Le changement de régime suit donc la droite d'équation : $h-p = a-j$. Au dessus de cette droite, $n^* > 1$ et donc : $\eta_e = 1$. En dessous, pour : $a-j > h-p > -a$, on a un équilibre polymorphique du jeu de population, avec des adopteurs en proportion : $1 > \eta_e > 0$ et de manière complémentaire un pourcentage $1 > 1 - \eta_e > 0$ de non adopteurs.

Pour $j > j_B$, (partie est de la Figure 4), le dénominateur est négatif, et n^* est de signe inverse à celui du celui du numérateur. Pour $h-p < a-j$ le numérateur est positif, on a donc : $n^* < 0$ et $\eta_e = 0$ (triangle avec les lignes verticales qui prolonge le régime de la zone sud ouest). Dans le cas contraire, $n^* > 1$ et donc $\eta_e = 1$ (zone grisée au nord-est, dans le prolongement du même régime). Dans la zone trapézoïdale à la fois grisée et hachurée par des lignes horizontales, on vérifie simultanément les conditions : $h-p \geq a-j$, (qui entraîne $\eta_e = 1$) et $h-p \leq -a$. Dans ce dernier cas, on sait que la proportion initiale d'adopteurs est nulle $\eta_a(0) = 0$ avec des anticipations myopes, et que le point fixe de l'équation (2.11) est instable. Deux équilibres stables aux bornes coexistent alors ($\eta_e^- = 0$, et : $\eta_e^+ = 1$). Nous avons vu que dans ce cas, la sélection de l'équilibre dépendait des conditions initiales et du schéma d'anticipation (Figure 3-b).

Les résultats que l'on obtient avec ce modèle sont en fait beaucoup plus généraux que ceux que l'on

vient de voir dans le cas d'une distribution uniforme. Nadal *et al.* (2005) ont démontré que l'existence de cette zone avec coexistence de deux équilibres était une propriété générale du modèle pour une très large classe de distributions unimodales continues par morceaux. De plus, dans le cas général, les équilibres stables ne correspondent pas aux cas dégénéré de la distribution uniforme, mais les deux équilibres sont strictement positifs : $1 > \eta_e^+ > 1/2 > \eta_e^- > 0$). La figure 7 ci-dessous présente les cas d'une distribution logistique (résultats obtenus par calculs numériques) et d'une distribution triangulaire (résultats analytiques).

Figure 5 : diagrammes de phase des régimes d'équilibre dans le cas d'une *pdf* logistique et triangulaire



Source : Nadal *et al.*, 2003 (pour la logistique), Gordon *et al.* 2004 (pour la triangulaire) et Nadal *et al.*, 2005,

Dans le cas d'une distribution logistique des IWA (Nadal *et al.* 2003, 2004, Phan *et al.* 2003, 2004), comme il n'y a pas de contraintes aux bornes, la relation d'équilibre (18) devient :

$$(2.12) \quad \eta_e = \int_{z_m}^{\infty} dF(x) = 1 - F(z_m) = \frac{1}{1 + \exp(\beta \cdot z_m)} \quad \text{avec:} \quad \sigma^2 = \frac{\pi^2}{3\beta^2}$$

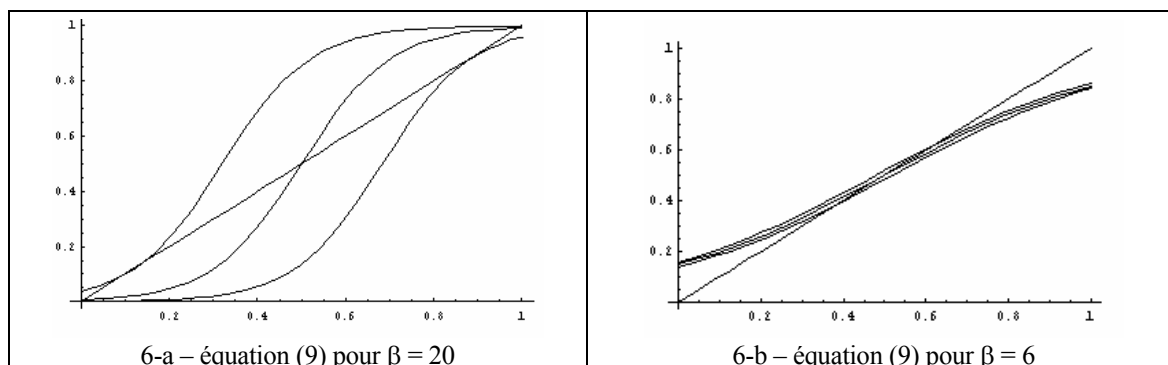
Pour une valeur donnée de p , l'équation (19) nous permet de d'identifier le (ou les) point(s) candidat(s) pour être un équilibre du taux de pénétration η_e comme un (des) point(s) fixe(s) de l'équation (20).

$$(2-13) \quad \eta_e = 1 - F(p - h - j \cdot \eta_e) = \frac{1}{1 + \exp(\beta \cdot (p - h - j \cdot \eta_e))}$$

On peut ainsi donner une forme analytique à la demande et calculer numériquement la (ou les)

solution(s) stable de (2.13) dans le cas de l'externalité globale pour p donné. Graphiquement, pour des valeurs données de j et de $h-p$. Des équilibres multiples peuvent apparaître pour de fortes valeurs de β (faible variance des préférences idiosyncrasiques),

Figure 6 : points fixes du taux de pénétration (équilibres à p donné)



Source : Phan, Gordon, Nadal, (2004)

Sur la figure 6-a, pour $\beta = 20$, on peut observer une *zone à deux équilibres stables* (et un point fixe instable pour $\eta_e = 1/2$), qui se trouve comprise approximativement entre les courbes du haut et du bas (correspondant à $p = 1,15$ et $p = 1,35$), de part et d'autre de la courbe du milieu, qui correspond à la valeur de p sans biais ($p_n = h+j/2 = 1.25$). Pour des valeurs de p supérieures à 1,35 ou inférieures à 1,15, il y a un seul point fixe (une seule trajectoire de la courbe de demande). Sur la figure 6-b, pour $\beta = 6$, il y a un seul équilibre, quelles que soient les valeurs de p .

L'existence de deux équilibres stables résulte d'abord d'une dualité des déterminants de la *meilleure réponse* des agents. En l'absence d'effet externe, les agents choisissent leur stratégie au regard des valeurs « non sociales », $h_i - p$ ce que les physiciens appellent le « champ externe ». Nous avons vu que pour les agents pour qui : $h_i > p$, adopter était une stratégie dominante quelque soit le niveau d'adoption dans leur voisinage. De même les agents tels que : $0 \geq h_i - p > -j/2$ adopteront avec des taux d'adoption dans leur voisinage toujours inférieur à 50%, et d'autant plus faible que j est fort et h_i peu inférieur à p . Tout cela conduit à un équilibre positif d'adoption inférieur dans les cas où seuls les agents avec un IWA suffisamment élevé au regard de p et de j . Au contraire, pour les agents qui ont un faible IWA, en particulier ceux qui n'adoptent que si : $\eta_g(t) \geq (p - h_i)/j \geq 1/2$ c'est *l'effet social* qui est déterminant, ce que les physiciens appellent le « champ local », c'est-à-dire les variables qui ne sont pas indépendantes des choix des autres agents dans le voisinage. Avant d'étudier le rapport entre cette multiplicité de points fixes et la non linéarité des fonctions cumulative de distribution des IWA, il convient d'isoler la dualité des causes, indépendamment de la distribution des IWA.

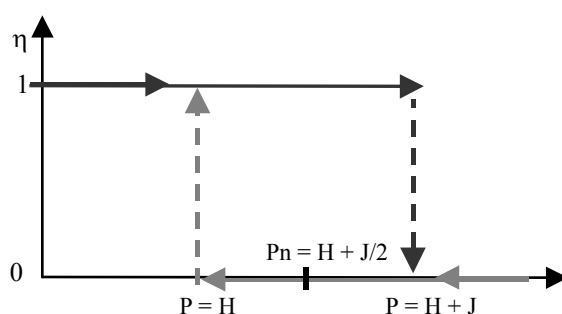
2.2. Transition de phase et l'hystérésis

Alors que la tradition économique (en particulier macroéconomique) désigne par « hystérésis », un phénomène qui résulte de la rémanence d'une variable dans un modèle dynamique, les physiciens

désigne par *hystérésis* une situation où deux équilibres sont possibles pour une même valeur du *champ externe* (les variables indépendantes des choix du voisinage). Cette différence sémantique a déjà fait l'objet d'une discussion systématique en économie (Amable, Henry, Lordon et Topol, 1990, 1992, 1994). Nous retiendrons ici l'acception des physiciens. Dans notre modèle, le *champ externe* moyen (normalisé par la taille du voisinage) est égal à : $h_i - p$. Comme nous avons supposés que les IWA (h_i) étaient « gelés » une fois donnés, la variation du champ externe ne peut résulter que d'une variation de p . Dans ce qui suit pour se fixer les idées sur un sujet plus économique, nous appellerons cette variable p le « prix ». On laisse ainsi le modèle d'émeute de Granovetter pour interpréter dorénavant le modèle (1) comme modèle de marché, ou les agents doivent choisir d'acheter ou de ne pas acheter un certain bien. Mais le même modèle reste bien entendu toujours applicable à de nombreux choix sociaux hors marché, comme l'a montré l'exemple du modèle d'émeute.

Partons d'une situation initiale où aucun agent n'a adopté le produit ($\omega_i = 0$ pour tout i). Si le champ externe est uniforme, ($h_i - p = h - p$, pour tout i), le choix de chaque agent dépend uniquement du signe de ce *champs externe*. Dans ce cas, nous pouvons avoir un exemple de ce que les physiciens appellent une « transition de premier ordre ». Celle-ci survient ici lorsque toute la population adopte simultanément le produit, quand p devient plus petit que h . Notons $p_h = h$ ce seuil d'adoption. Il est important de remarquer que *le phénomène inverse ne se produit pas au même seuil*. En effet, quand tous les agents ont précédemment adopté, la fonction de surplus dépend maintenant à la fois du champ externe $h - p$ et du champ local, (l'influence sociale) ici égal à j , puisque tous les agents sont devenu des consommateurs de ce bien. Le seuil de sortie du marché sera donc maintenant : $p_j = h - p + j$. Si les prix augmentent au-delà de p_j , tous les agents quitteront le marché. Dans ce cas extrême, on observe donc un intervalle de prix $[p_h, p_j]$ dans lequel la demande globale reste constante et ne varie pas avec les prix. La largeur de cet intervalle dépend uniquement du paramètre d'influence sociale j (Figure 7).

Figure 7 : seuils critiques dans la relation entre l'adoption et le prix, avec des agents identiques.



Source Phan, Pajot, Nadal (2003)

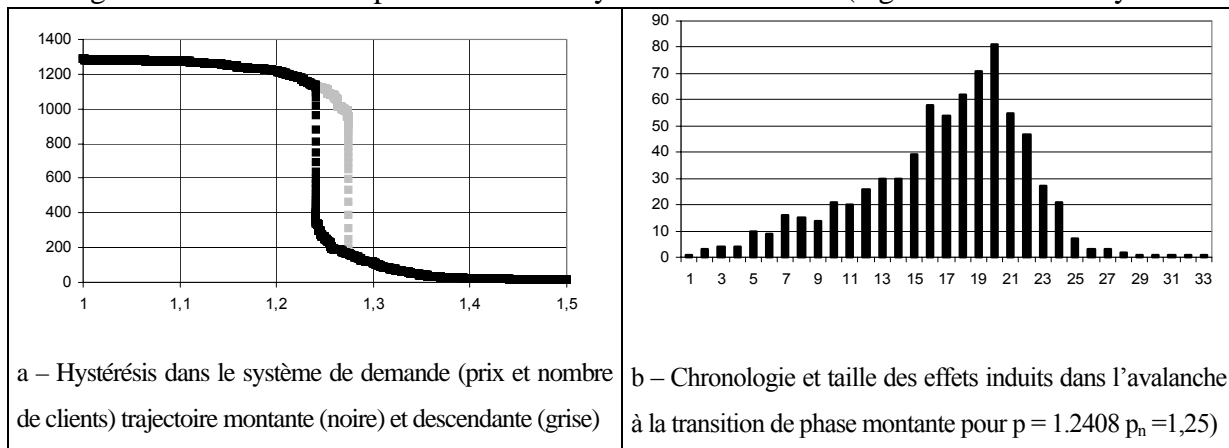
En présence d'hétérogénéité des préférences (dispersion des h_i), la demande variera de manière moins abrupte, mais une *boucle d'hystérésis* peut apparaître. La courbe de demande peut alors prendre deux trajectoires différentes selon que les prix augmentent ou baissent, comme nous allons

le voir. Lorsque les prix changent, le nombre de clients évolue par blocs, lesquels peuvent s'enchaîner en formant des avalanches de toutes tailles. Si la dispersion des préférences est suffisamment forte (la variance σ^2 des h_i est large comparée à la complémentarité stratégique provenant de la dépendance sociale, J), il y aura seulement de petites avalanches ; les effets directs l'emportant sur les effets induits. Si au contraire, les préférences sont très concentrées, (σ^2 petit relativement à J), on tendra vers une unique avalanche, de la taille de la population, comme dans le cas des h_i uniformément égaux à h que l'on vient de décrire. Dans les régimes intermédiaires, une distribution d'avalanches de toutes tailles peut être observée.

Lorsque les IWA (h_i) sont distribuées selon une loi symétrique, il est également possible de donner un autre sens au seuil $J/2$. En effet, on peut identifier une valeur théorique de p qui correspond à une situation moyenne *sans biais* (symétrique) en faveur de l'un des deux choix possibles. Dans ce cas, la disposition à payer est neutre en moyenne : il y a autant d'agents qui adoptent le produit que d'agents qui ne l'adoptent pas. Ainsi, si 50% des agents sont clients pour ce produit, la disposition moyenne à payer sera $h + J/2$, et le prix sans biais sera : $p_n = h + J/2$. Remarquons que p_n se trouve exactement au milieu de l'intervalle de prix $[p_h, p_j]$. Si l'on part de cette situation de symétrie, avec $p = p_n$, on peut distinguer les prix qui présentent un biais en faveur des décisions d'achat ($p < p_n$, donc en moyenne $h + J/2 - p > 0$), et ceux qui sont en moyenne en défaveur de l'achat ($p > p_n$). Finalement, en dynamique, une *rupture de symétrie* peut intervenir pour $p = p_n$ lorsqu'une avalanche conduit l'influence sociale à passer le seuil de $J/2$.

Les comportements dynamiques de la population d'acheteurs face aux prix ne sont cependant pas triviaux. L'étude par simulation de la dynamique d'ajustement des acheteurs à une variation des prix, permet de mettre en évidence les notions de rupture de symétrie et de transition de phase utilisées par les physiciens, ce qui illustre l'intérêt d'une approche multi-agents dans ce cas pourtant simple et très proche de la littérature standard. Pour une variation des prix donnée, il est possible d'observer les variations résultantes de la demande. Commençons par le cas le plus spectaculaire, où tous les agents révisent leurs choix simultanément (régime d'activation synchrone) dans le cas d'interactions globales.

Figures 8 : Transition de phase brutale du système de demande (régime d'activation synchrone)



Source : Phan, Pajot, Nadal (2003) ; Paramètres : $h = 10$, $J = 0.5$, Logistique avec $\beta = 10$; seed = 190.

La courbe de la figure 3-a, représente la relation entre les prix et le niveau de demande pour chaque pas de simulation. Cette courbe comprend donc à la fois les positions d'équilibre à prix donné et l'ensemble des positions temporaires atteintes à chaque étape des avalanches. La courbe noire (grise) représente la trajectoire de la demande "montante" (descendante) suivie lorsque les prix diminuent (augmentent) par incréments de 10^{-4} , dans l'intervalle $[0.9, 1.6]$. On observe une boucle d'hystérésis avec une transition de phase autour du point de symétrie, $p_n = 1,25$. Dans chacune des deux branches, des avalanches se produisent lors d'une transition de phase dite « du premier ordre ».

Le long de la branche "montante" de l'hystérésis (avec prix décroissants – la courbe noire), une succession d'adoption en chaîne induites les unes par les autres se déclenche pour $p = 1.2408 < p_n$, conduisant l'ensemble du système de demande d'un taux d'adoption de l'ordre de 30% à un taux de près de 87%. La figure 3-b présente la chronologie et la taille de ces effets induits qui viennent se cumuler dans une gigantesque avalanche.

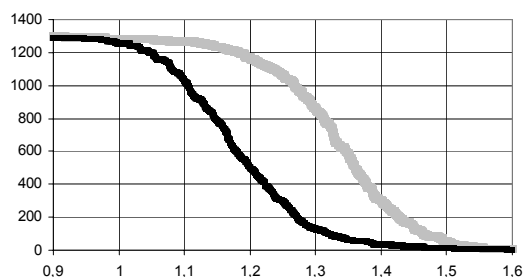
Le long de la branche "descendante" de l'hystérésis (avec prix croissants – la courbe grise), l'effet externe entraîne une forte résistance du système de demande à la décroissance du nombre de clients. Le seuil de transition de phase se situe ici autour de $p = 1.2744 > p_n$. Pour cette valeur, le taux d'adoption du produit diminue drastiquement de 73% à 12,7%.

L'ampleur des avalanches dans la boucle l'hystérésis augmente avec la connectivité. La figure 4-a montre une boucle d'hystérésis avec une évolution progressive sans avalanches importantes (transition de phase du second ordre). La simulation repose sur les même paramètres, mais le réseau sous-jacent est périodique de dimension un (un cercle), et chaque agent n'a que 2 voisins. La dimension des avalanches durant la transition de phase augmente également lorsque la variance de la distribution des θ_i diminue ($\sigma^2 = \pi^2/(3.\beta^2)$ quand β augmente), ainsi que l'on a pu le constater dans le cas extrême de la disposition à payer uniforme pour tous les agents ($h_i = h$ pour tout i). Les avalanches sont d'autant plus importantes à la transition de phase que les préférences des agents,

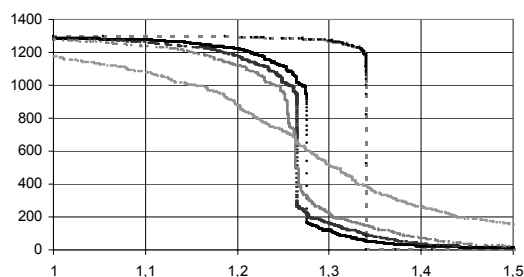
sont proches. La figure 4-b montre un ensemble de trajectoires montantes pour différentes valeurs of β , prises entre 20 et 5. Pour $\beta = 5$ il n'y a plus d'hystérésis du tout. Sur la figure 4-c, on peut voir un hystérésis étroit pour un réseau périodique de dimension un (cercle) avec 8 voisins par agents et $\beta = 5$. Pour $\beta = 10$, le même réseau fait apparaître un hystérésis beaucoup plus ample.

Figures 9 : relation prix-demande sous un régime d'activation synchrone ; seed = 190

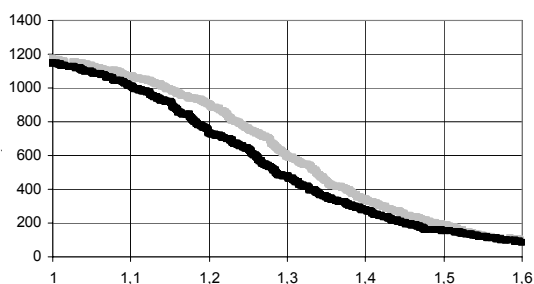
(9-a) hystérésis avec voisinage = 2



(9-b) connectivité totale ; β entre 20 & 5

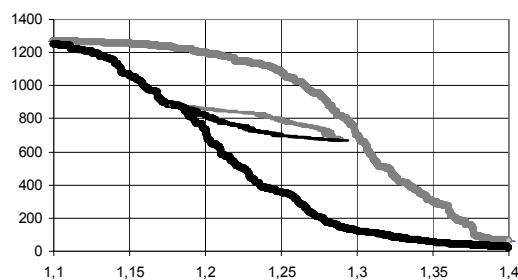


(9-c) faible hystérésis (voisinage = 8 ; $\beta = 5$)



(9-d) Inner Hysteresis (voisinage = 8 $\beta = 10$)

(Sethna) sous-trajectoire : [1,18-1,29]



Source : Phan,Pajot, Nadal (2003)

Une propriété intéressante des hystérésis dans les modèles d'Ising à champs aléatoire a été établie par Sethna et al. (1993). Pour des raisons similaires à celles qui conduisent à un hystérésis de la demande globale, tout changement de direction dans l'évolution des prix conduit à des boucles internes à l'hystérésis globale. Ces boucles ont comme propriété de revenir à leur point de départ, lorsque le prix redevient égal au prix initial. Sur la figure 4-d, le retournement de prix (une hausse) se situe en un point de la trajectoire montante. Cette augmentation des prix se traduit par une baisse moins que proportionnelle du nombre de client, à cause de la résistance à la baisse due à l'influence sociale (courbe grise interne). Lorsque le prix remonte, la courbe grise rejoint le point de départ. Du point de vue économique, une telle propriété peut avoir plusieurs applications importantes, comme la possibilité pour le vendeur d'apprendre au voisinage d'une trajectoire.

3. Choix stochastiques

3.1. Main tremblante

./..

Sous l'hypothèse de main tremblante logistique (aussi appelée *quantal* réponse), la probabilité d'adopter est d'autant plus grande que le surplus non optimisé v_i est élevé

$$(21) \quad v_i(\tilde{\eta}_a) = h_i - p + j.\tilde{\eta}_a$$

$$(22) \quad P(\omega_i = 1 | \tilde{\eta}_a) = P(\varepsilon_i \leq v_i(\tilde{\eta}_a)) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta.v_i)}$$

Où ε est une variable aléatoire indépendante et identiquement distribuée sur les agents, qui suit une loi logistique centrée de paramètre β . Lorsque l'écart type de la distribution logistique tend vers zéro, β tends vers l'infini et l'on retrouve la règle de décision déterministe précédente (équations 7 et 10). En effet, si le surplus est positif, l'exponentielle tends vers zéro et la probabilité d'adopter tends vers un ; si au contraire, le surplus est négatif, l'exponentielle tends vers l'infini et la probabilité d'adopter tends vers zéro.

Plus généralement, la probabilité de choix conditionnelle à l'anticipation d'adoption s'écrit :

$$(3.1) \quad P(\omega_i | \tilde{\eta}_a) = \frac{\exp(\omega_i.\beta.v_i)}{1 + \exp(\beta.v_i)}$$

Dans ce cas particulier, comme : $\omega_i \in \{0,1\}$, l'espérance d'adoption conditionnelle à l'anticipation d'adoption est égale à la probabilité conditionnelle d'adoption. (si les modalités du choix avaient été : $s_i \in \{-1,1\}$, l'espérance conditionnelle d'adoption aurait été une tangente hyperbolique, cf. par exemple : Durlauf, 1997)

$$(3.2) \quad E[\omega_i | \tilde{\eta}_a] = P(\omega_i = 1 | \tilde{\eta}_a)$$

Remarquons que dans le cas où les agents ont tous la même IWA ($h_i = h$ pour tout i) on a :

$$(3.3) \quad v_i(\tilde{\eta}_a) = h - p + j.\tilde{\eta}_a = -z_m(\tilde{\eta}_a) \quad \forall i \in \Omega_N$$

Où z_m est la part idiosyncrasique de l'IWA de l'agent marginal au surplus nul (équation 16). La probabilité (conditionnelle à l'adoption anticipée) qu'un agent i choisisse d'adopter est maintenant exactement la même pour tous les agents. Elle est également égale à la probabilité (conditionnelle à l'adoption anticipée) qu'un agent tiré au hasard ait un ε_i supérieur à l'IWA marginal z_m , et adopte en suivant la règle de meilleure réponse dans le cas du désordre gelé (équation 19)

$$(3.4) \quad P(\omega_i = 1 | \tilde{\eta}_a) = P(\varepsilon_i > z_m(\tilde{\eta}_a)) = \frac{1}{1 + \exp(\beta z_m)} \quad \forall i \in \Omega_N$$

Si les termes stochastiques individuels sont indépendants, la mesure jointe de probabilité sur la population nous donne la probabilité d'une configuration spécifique du vecteur $\vec{\omega} \equiv (\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_N)$. Elle suit une loi de Gibbs ()

$$P(\vec{\omega} | \tilde{\eta}_a) = \prod_i P(\omega_i | \tilde{\eta}_a)$$

$$(3.5) \quad P(\vec{\omega} | \tilde{\eta}_a) \equiv \prod_i P(\omega_i | \tilde{\eta}_a) = \prod_i \frac{\exp(\omega_i \beta v_i)}{1 + \exp(\beta v_i)}$$

A la suite de Mansky (), Brock, Durlauf (2000) considèrent la solution du problème de coordination sous l'hypothèse d'anticipation rationnelle. Dans ce cas, les anticipations d'adoption des agents sont toutes égales à l'espérance mathématique de l'adoption et on a un système de N d'équation :

$$\tilde{\eta}_a = E(\omega | \tilde{\eta}_a)$$

./..

3.3. Distribution invariante du processus stationnaire.

On montre que le processus stochastique de « main tremblante » est ergodique. A partir des probabilités de transition, il est possible de calculer numériquement la distribution invariante du processus stationnaire (Annexe A1)

$$(3.8) \quad p_{st}(n) = p_s(0) \cdot C_N^n \exp(+\beta(n.h + j.\eta.(n+1)/2)) \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

$$p_s(0) = \left(1 + \sum_{n=1}^N C_N^n \exp(+\beta(n.h + j.\eta.(n+1)/2)) \right)^{-1}$$

Figures 9 : distributions invariantes du processus

On peut aussi étudier les propriétés analytiques de cette distribution grâce à l'approximation au dérivées partielle de Fokker-Plank (cf Annexe B, Weidlich et Haag, 1983, Orléan, 2002).

4. Un exemple d'application au marché : monopole avec externalité

Dans cette section, on considère un modèle de marché de monopole avec externalité étudié dans Nadal *et al.* 2003, 2004). Les agents choisissent itérativement d'acheter ou de ne pas acheter. On s'intéresse au problème de détermination des prix d'équilibre de long terme du monopole. On trouve dans la littérature une solution pour le prix optimal du vendeur dans les deux cas polaires de l'absence d'externalité et de l'externalité globale, mais la question de la pluralité des équilibres stables pour un même prix n'a pas été étudiée systématiquement avant Nadal *et al.* 2003. De plus, Nadal *et al.*, 2005 étendent l'analyse à de larges classe de distributions continues ou continues par morceaux, sans se limiter à la Logistique. Dans Phan et al. (2003b) des jeux de simulations explorent différentes configurations de réseau régulier périodique en dimension 1 (voisinage 2,4,6,8) et des configurations intermédiaires entre réseau régulier et réseau aléatoire correspondantes (petits mondes). Ces résultats montrent que le prix optimal du monopole en régime stationnaire augmente régulièrement avec la connectivité, ce qui souligne la sensibilité des résultats à la topologie du réseau. mais on se limitera à présenter ici le cas le plus simple, avec une externalité globale (champ moyen). Après avoir rappelé brièvement les résultats analytiques dans le cas de l'externalité globale, on discute de la pluralité d'équilibres dans le cas intéressant où les consommateurs ne souhaitent pas, en moyenne, acheter le produit ($h < 0$).

4.1. Le prix optimal du monopole en régime stationnaire : Le cas de l'externalité globale.

Le monopoleur est supposé se trouver en situation de *risque* : il connaît le comportement des consommateurs et la distribution de probabilité des IWA. Il observe son nombre de clients et connaît donc le taux d'adoption dans la population. Par contre, il n'observe pas les IWA de ses clients, mais seulement leur comportement d'adoption. On considère un désordre gelé, c'est-à-dire que les agents ont une valeur fixée de z_i donnée au début de la période et qui ne change pas après. On considère que la distribution est logistique, c'est à dire que le niveau d'adoption d'équilibre est conforme à l'équation (2.12). Par inversion de cette condition d'équilibre, on peut faire apparaître *une fonction inverse de demande* :

$$(4.1) \quad p^d(\eta_e) = h + J \cdot \eta_e + \frac{1}{\beta} \cdot \ln \frac{1 - \eta_e}{\eta_e}$$

La relation (2.12) permet également de définir la demande globale comme une fonction implicite $\eta_e(p)$ dont on peut calculer les dérivées par rapport à p :

$$\Phi(\eta_e(p), p) = \eta_e(p) + F(p - h - J \cdot \eta_e(p)) = 1$$

$$(4.2) \quad \frac{d\eta_e(p)}{dp} = \frac{-\partial\Phi/\partial p}{\partial\Phi/\partial\eta_e} = \frac{-f(p - h - j \cdot \eta_e)}{1 - f(p - h - j \cdot \eta_e) \cdot j}$$

Dans le cas de l'externalité globale avec influence sociale additive, l'équation (10) nous permet d'exprimer le taux d'adoption comme une fonction implicite des prix. Comme le monopoleur observe le taux d'adoption et qu'il est supposé tout connaître du comportement de demande (1) des consommateurs et la distribution de probabilité des dispositions individuelles à payer, le monopoleur peut écrire et résoudre le programme qui maximise son espérance de profit (pour simplifier, on suppose des coûts nuls et on normalise la taille de la population à 1, ce qui revient à utiliser les prix par tête p) :

$$(4.3) \quad \max_p E[\Pi(p)] = p \cdot \eta_c(p)$$

En utilisant la dérivation implicite (4.2) la condition de premier ordre s'écrit :

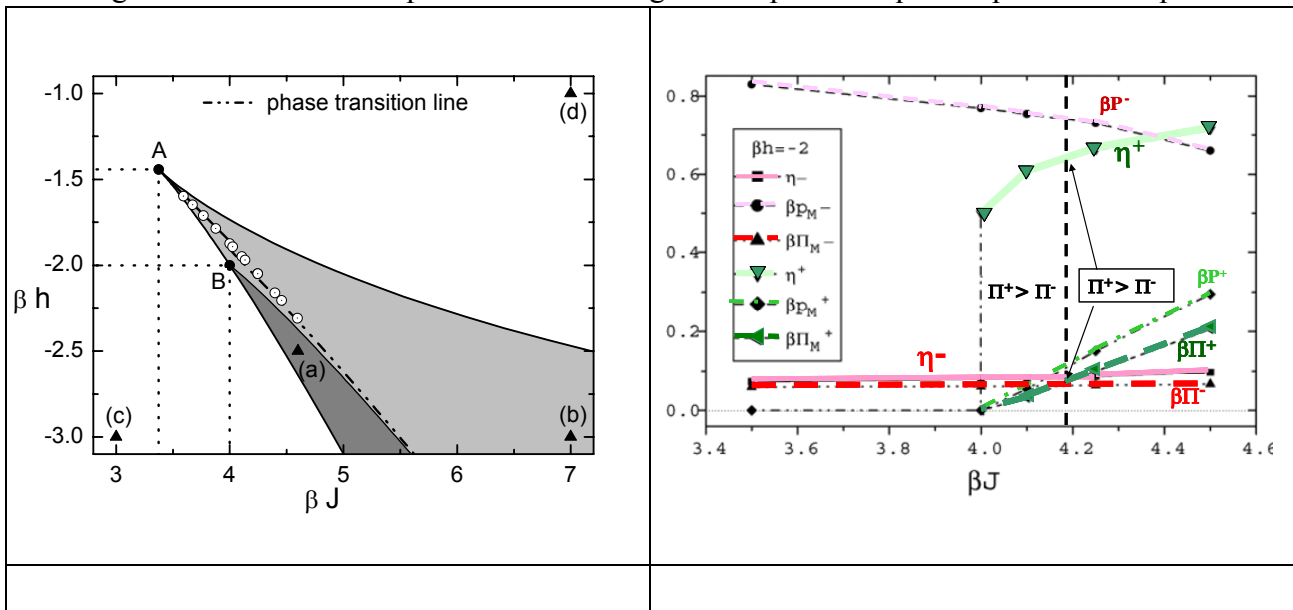
$$(4.4) \quad \frac{p \cdot f(p - h - J \cdot \eta_c)}{1 - J \cdot f(p - h - J \cdot \eta_c)} = \eta_c$$

En utilisant une propriété commode de la distribution logistique: $f(x) = \beta \cdot F(x) \cdot (1 - F(x))$, on peut écrire l'équation d'une courbe inverse de quasi-offre (le monopoleur, en intégrant la fonction de demande inverse agit ici en suiveur de stackelberg) :

$$(4.5) \quad p^o(\eta_c) = \frac{1}{\beta \cdot (1 - \eta_c)} - J \cdot \eta_c$$

Les solutions optimales correspondent à l'intersection des courbes inverses de quasi-offre (4.5) et de demande (4.1) qui nous donnent les points de compatibilité entre l'ensemble agrégé des meilleures réponses des demandeurs au prix p et la meilleure réponse du monopoleur, compte tenu de l'intégration dans sa fonction objectif des caractéristiques de la demande. Dans le cas où $h > 0$ on peut montrer que l'équilibre de marché qui maximise le profit de monopole est unique. Dans le cas où $h < 0$ (peu de consommateurs désirent le bien), on peut également montrer qu'il y a dans certains cas deux maximum locaux (avec des prix élevés ou faibles, cf. Figure 10) séparés par une transition brutale. Le maximum global dépend de $\beta \cdot j$ et correspond soit à une situation avec peu d'acheteurs et des prix élevés, soit à beaucoup d'acheteurs avec un prix faible (Nadal *et al.* 2003).

Figures 10 : transition de phase entre deux régimes de profit d'équilibre pour le monopole



Source : Nadal et al. (2003)

5 - Conclusion

Pour conclure, dans des situations où les choix individuels sont liés par des phénomènes de dépendance sociale, les externalités entre ces choix conduisent à des dynamiques complexes au niveau agrégé, même dans le cas de réseaux réguliers ou totalement connectés (externalité globale).

Dans le cas où la coordination des agents concerne un problème de formation de la demande, la pluralité possible des équilibres pour un prix donné rend le problème du vendeur non trivial, même dans le cas risqué où celui-ci connaît tous les paramètres du programme (1.1) et la distribution initiale des paramètres idiosyncrasiques. En effet, les caractéristiques de la demande se traduisent par une déformation de la distribution des dispositions à payer, due à l'externalité qui rend le problème plus complexe. De plus, dans le cas des populations finies comme dans celui des réseaux à faible connectivité, la distribution des dispositions à payer, liée aux hasards de la distribution des agents sur le réseau entraîne des effets de taille finie, que ce soit au niveau local (avec apparition de clusters et de « zones gelées ») ou au niveau global.

Enfin, au-delà du marché, de nombreux problèmes d'organisation, comme le management d'association ou de communauté, qui peuvent se traduire par des problèmes de coordination, sont justiciables de la classe de modèle de choix discret que nous avons présenté, ou d'une extension de ces modèles (choix multiples et / ou imbriqués, effets d'apprentissages, émergence de classes de comportement etc...)

Références bibliographiques

- Amable, B., Henry, J., Lordon, F., et Topol, R. (1990) "Une tentative d'élucidation d'un concept flou : l'hystérésis", Actes du Colloque A.F.S.E., Paris : Nathan.
- Amable, B., Henry, J., Lordon, F., et Topol, R. (1992) "Un commentaire suscité par l'article de Jean-Marie LePage", *Revue d'économie Politique*, 102(1), 123-38.
- Amable, B., Henry, J., Lordon, F., et Topol, R. (1994) "Strong Hysteresis versus Zero-Root Dynamics", *Economics Letters*, 44, 43-47.
- Anderson P.W., Stein L. (1983) "broken symmetry, emergent properties, dissipative structure, life: are they related ?" in Anderson P.W ed. *Basic notions of condensed matter physics*; p.263-285.
- Anderson S.P., DePalma A, Thisse J.-F. (1992) *Discrete Choice Theory of Product Differentiation*, MIT Press, Cambridge MA.
- Aoki M. (1996) *New Approaches to Macroeconomic Modeling: Evolutionary Stochastic Dynamics, Multiple Equilibria and Externalities as Field Effect*, Cambridge University Press.
- Arthur W.B., Durlauf S.N., Lane D.A. eds. (1997) ; *The Economy as an Evolving Complex System II* ; Santa Fee Institute, Studies on the Sciences of Complexity, Addison-Wesley Pub.Co, Reading Ma .
- Baron, R., Durieu J., Haller H., Solal P. (2004) Stochastic Evolutionary Game Theory, in Bourguine, Nadal op.cit. p. 267-280.
- Bak P. (1996) *How Nature Works, The science of self-organized criticality*; Springer Verlag, N.Y. trad française: quand la nature s'organise, avalanches, tremblements de terre et autres cataclysmes Flammarion, Paris 1996.
- Bernheim B.D. (1994) "A Theory of Conformity", *Journal of Political Economy*, vol.102/5, 841-877.
- Bikchandani S., Hirshleifer D., Welch I. (1992) ; « Theory of Fads, Fashion, Custom and Cultural Change as Informational Cascades » ; *Journal of Political Economy*, vol.100-5, p. 992-1026.
- Blume L.E. (1993) "The Statistical Mechanics of Strategic Interaction", *Games and Economic Behavior*, 5, 387-424.
- Blume L.E. (1995) ; « The Statistical Mechanics of Best-Response Strategy Revisions » ; *Games and Economic Behavior*, 11, p.111-145.
- Blume L.E. (1997) "Population Games", in : Arthur, Durlauf, Lane eds., op cit. , p. 425-460.
- Blume L.E., Durlauf S.N. (2001) "The Interaction-Based Approach to Socioeconomic Behavior", in Durlauf, Young (eds.), *Social Dynamics*, Brooking Institution & MIT press pp.15-44.
- Bourguine P., Nadal J.P.eds., (2004) *Cognitive Economics*, Springer Verlag, Berlin, Forthcoming.
- Bulow J.I., Geanakoplos J.D., Klemperer P.D. (1985) "Multimarket oligopoly: strategic substitutes and complements", *Journal of Political Economy*, 93/3 p 488-511.
- Camerer C. (2003) *Behavioural Game Theory: Experiments on Strategic Interactions*, Princeton University Press.
- Cohendet P., Llerena P, Stahn H., Umbauer G. eds. (1998) *The Economics of Networks, Interactions and Behaviours* Springer Verlag, Berlin.
- Cooper R., John A. (1988) "Coordinating coordination failures in keynesian models". *Quarterly Journal of Economics*, 103 p. 441-463.
- Dalle J.M. (1998) "Heterogeneity, interactions structures and the diffusion of technological innovation" in Orléan, Lesourme, eds. op.cit.
- Durlauf S.N. (1997) "Statistical Mechanics Approaches to Socioeconomic Behavior", in Arthur, et al. op.cit. p. 81-104
- Durlauf S.N. (1999) "How can Statistical Mechanics contribute to social science?" *Proceedings of the National Academy of Sciences*.

- Foster, D.P., Young H.P. (1990) "Stochastic Evolutionary Game Dynamics", *Theoretical Population Biology* 38:219-232.
- Galam S. (2003) "Spontaneous Symmetry Breaking and the transition to disorder in Physics", in Bourguine, Nadal op.cit. p. 157-168.
- Galam S., Gefen Y., Shapir Y. (1982) "Sociophysics: A Mean Behavior Model for the Process of Strike", *Mathematical Journal of Sociology*, 9, p.1-13.
- Gordon M.B. (2004) "Statistical Mechanics" in Bourguine, Nadal op.cit. p. 131-156.
- Gordon M.B., Nadal J.P., Phan D., Vannimenus J. (2005) "Seller's dilemma due to social interactions between customers", to appear in *Physica A*
- Granovetter M. (1978), "Threshold Models of Collective Behavior", *American Journal of Sociology*, 83(6), pp. 1360-1380, trad. française in : *Le Marché autrement*, desclée de Brouwer, 2000, p.115-148.
- Harsanyi J.C., Selten R. (1998) *A General Theory of Equilibrium Selection in Games* MIT Press.
- Hors, I. (1995) « Des modèles de transition de phase en économie ? »; *Revue Economique*, p. 817-826.
- Ioannides Y.M. (1997) Evolution of Trading Structures, in Arthur *et al.*, op. cit. p.129-161.
- Kirman A. P. (1997a) The Economy as an Interactive System » in Arthur *et al.*, op. cit. p. 491-531.
- Kirman A.P. (1998) Economies with interacting agents ; in Cohendet *et al.* eds., op.cit., p. 17-52.
- Lesourne J., Orléan A. eds. (1998) *Advances in Self-Organization and Evolutionary Economics* ; Economica, Londres Paris.
- McFadden D. (1974) "Econometric Analysis of Qualitative response Models", in Griliches Intrilligator (eds.), *Handbook of Econometrics Vol II* Elsevier Science B.V, Amsterdam.
- Foster, D.P., Young H.P. (1990) Stochastic Evolutionary Game Dynamics, *Theoretical Population Biology* 38:219-232.
- Mansky C.F. (2000) Economic Analysis of Social Interactions, *The Journal of Economic Perspectives*, 14 – 3 Summer, p.115-136.
- Monderer D., Shapley L.S. (1996) "Potential Games" *Games Economic Behaviour* 14 p.124-143.
- Nadal J.P., Phan D., (2005) *Physique Statistique de phénomènes collectives en sciences économiques et sociales*, support de présentation MSH.
- Nadal J.P., Gordon M.B, Phan D., (2005) in preparation.
- Nadal J.P., Phan D., Gordon M.B, Vannimenus J. (2003), "Monopoly Market with Externality: an Analysis with Statistical Physics and ACE", *8th Annual Workshop on Economics with Heterogeneous Interacting Agents (WEHIA 2003)*, Kiel, May 29-31. also available at the physicist's base : <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0311096>
- Nadal J.P., Phan D., Gordon M.B, Vannimenus J. (2004) "Multiple equilibria in a monopoly market with heterogeneous agents and externalities", submitted to *Quantitative Finance*.
- Orléan A. (1990) « Le rôle des influences interpersonnelles dans la détermination des cours boursiers » *Revue Economique*, vol 41, N°5 septembre, p.839-868.
- Orléan A. (1998) « The evolution of imitation » in Cohendet et al. op.cit., p.325-339.
- Orléan A. (2002) « Les interactions mimétiques » in Lesourne, Orléan, Walliser (eds.) *Leçons de microéconomie évolutionniste*, Odile Jacob.
- Phan D.(2003) "Small Worlds and Phase Transition in Agent Based Models with Binary Choices" in: Muller J.P., Seidel M.M. eds. *4° workshop on Agent-Based Simulation*, Montpellier, SCS Publishing House, Erlangen, San Diego.

- Phan D. (2004) "From Agent-Based Computational Economics towards Cognitive Economics" in Bourguine P., Nadal J.P. eds. (2004) *Cognitive Economics* ; Springer Verlag, p. 371-398.
- Phan D., Gordon M.B, Nadal J.P.. (2004) Social Interactions in Economic Theory: an Insight from Statistical Mechanics" in Bourguine P., Nadal J.P. eds. (2004) *Cognitive Economics* ; Springer Verlag, p. 225-358.
- Phan D., Pajot S. Nadal J.P. (2003) "The Monopolist's Market with Discrete Choices and Network Externality Revisited: Small-Worlds, Phase Transition and Avalanches in an ACE Framework", *Ninth annual meeting of the Society of Computational Economics* University of Washington, Seattle, USA, July 11 - 13, 2003.
also available at the economists's WP base : <http://econpapers.hhs.se/paper/scescecf3/150.htm>
- Phan D. Wakldeck R. Gordon M.B, Nadal J.P. (2005) Adoption and Cooperation in Communities: Mixed equilibrium in polymorphic populations" Paper accepted at the *10th Annual Workshop on Economic Heterogeneous Interacting Agents (WEHIA 2005)*, June 13-15, University of Essex, United Kingdom.
- Schelling T.S. (1960) *The strategy of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge, Ma.. trad. française : *La stratégie du conflit*, PUF 1986.
- Schelling T.S. (1973) Hockey Helmets, Concealed Weapons, and Daylight Saving, a study of binary choices with externalities, *Journal of Conflict Resolution*, Vol 17, 6 3 September p. 381-428.
- Schelling T.S. (1978) *Micromotives and Macrobehavior* W.W. Norton and Co, N.Y. trad française: *La tyrannie des petites décisions*; Puf, Paris 1980
- Schuster H.G. (2001) *Complex Adaptive Systems, An Introduction*; Scator Verlag, Saarbrücken.
- Steyer A. (199X) *La théorie des avalanches ; physique sociale des phénomènes de propagation*, thèse inédite de doctorat HEC en sciences de gestion.
- Tesfatsion L. (2001) "Agent-Based Computational Economics: A Brief Guide to the Literature" in Michie J. (ed.), *Reader's Guide to the Social Sciences, Volume 1*, Fitzroy-Dearborn, London.
- Tesfatsion L. (1997) "How Economists Can Get Alife," in W. Brian Arthur, Steven Durlauf, and David Lane (eds.), *The Economy as an Evolving Complex System, II*, Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, Volume XXVII, Addison-Wesley, p. 533-564.
- Topol R. (1991) « Bubbles and volatility of stock prices: effect of mimetic contagion »; *Economic Journal*, 101, july p.786-800.
- Weidlich & Haag (1983) *Concepts and Models of a Quantitative Sociology, the dynamics of interacting populations*; Springer Verlag Berlin
- Weisbusch G. (1989); *Dynamique des Systèmes Complexes; une introduction aux réseaux d'automates*; InterEditions / CNRS; *Complex Systems Dynamics* Santa Fee Institute Studies in the sciences of complexity 1991.
- Young H.P. (1998) *Individual Strategy and Social Structure*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- * articles disponibles sur : <http://perso.univ-rennes1.fr/denis.phan/>

Moduleco

- <http://perso.univ-rennes1.fr/denis.phan/moduleco/>
- <http://www.cs.man.ac.uk/ai/public/moduleco/>

Annexe A : régimes d'équilibre d'adoption

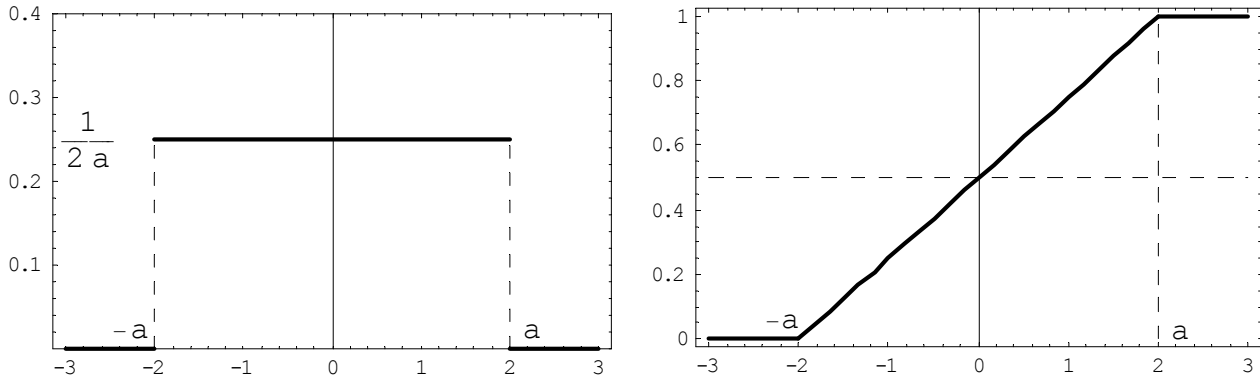
A. 1. Distribution uniforme des IWA sur $[-a, +a]$

On considère une distribution uniforme des IWA sur $[-a, +a]$ avec moyenne nulle.

$$(A.1.1) \quad \begin{aligned} f_1(z) &= 0 & \text{si: } & z \leq -a \\ f_1(z) &= \frac{1}{2a} & \text{si: } & -a < z < a \\ f_1(z) &= 0 & \text{si: } & a \leq z \end{aligned}$$

Compte tenu de la symétrie par rapport à zéro, la fonction de répartition est telle que : $F_1(0) = 1/2$.

Figure A-2.1 : distribution uniforme sur $[-2, +2]$



La probabilité globale d'adoption est liée par l'équation de point fixe :

$$(A.1.2) \quad \eta_a = P(z_i > z_m) = \int_{z_m}^{\infty} dF_1(z) = 1 - \int_{-a}^{z_m} dF_1(z)$$

avec : $z_m \equiv p - h - j \cdot \eta_a \quad 0 \leq \eta_a \leq 1$

Plus spécifiquement, on a :

$$(A.1.3) \quad G_1(z_m) = 1 - F_1(z_m) = 1 - \frac{1}{2a} [z]_{-a}^{z_m} = \frac{1}{2} - \frac{z_m}{2a}$$

En remplaçant z_m par sa valeur selon (A.1.3), et compte tenu des contraintes sur η_a , avec une distribution uniforme sur $[-a, +a]$, les équilibres sont donnés par :

$$(A.1.4) \quad \eta_e = \inf \left\{ \sup \{0, \eta^*\}, 1 \right\} \quad \eta^* = \frac{a + h - p}{2a - j}$$

On a donc en particulier :

$$\begin{aligned} h-p &\leq -a && \text{quand } \eta^*=0 \\ h-p &= -j/2 && \text{quand } \eta^*=1/2 \\ h-p &\geq a-j && \text{quand } \eta^*=1 \end{aligned}$$

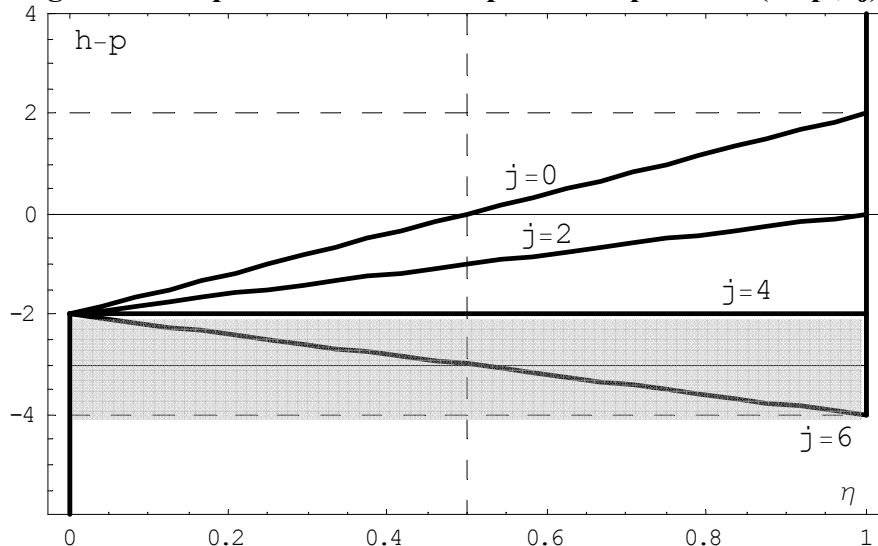
Pour caractériser les régimes d'équilibres par un « diagramme de phase », nous suivons une méthodologie utilisée par les physiciens ¹ En se servant de la formule (A.1.2), on peut exprimer z_m en fonction du taux d'adoption η_a par inversion de la fonction F_1 dans (A.1.3) :

$$(A.1.5) \quad \eta_a = \frac{1}{2} - \frac{z_m}{2a} \Rightarrow z_m = G_1^{-1}(\eta_a) = a(1 - 2\eta_a)$$

$$h-p = \Phi(\eta_a) \equiv (2a-j)\eta_a - a$$

Les solutions de l'équation de point fixe (A.1.2) correspondent aux solutions des équations (A.1.5), pour les valeurs de η_a comprises entre 0 et 1. Selon la configuration de la courbe représentative de la fonction : $\Phi(\eta_a)$, on voit sur le graphique A.1.2 qu'on a une solution unique avec $0 \leq \eta_a \leq 1$, ou bien la possibilité de plusieurs solutions. La zone à solution unique correspond à la zone où la fonction $\Phi(\eta_a)$ est monotone croissante. Pour des valeurs de : $h-p > j-a$, la solution unique est $\eta_a = 1$, et $\Phi(\eta_a)$ diverge vers plus l'infini. Inversement si : $h-p < -a$, $\eta_a = 0$ est solution et $\Phi(\eta_a)$ diverge vers moins l'infini.

Figure A.1.2 : points fixes dans l'espace des « phases » ($h-p$, j)



Le régime des solutions connaît un seuil critique en $j = j_B = 2a$, où la solution de (A.1.4.) en η^*

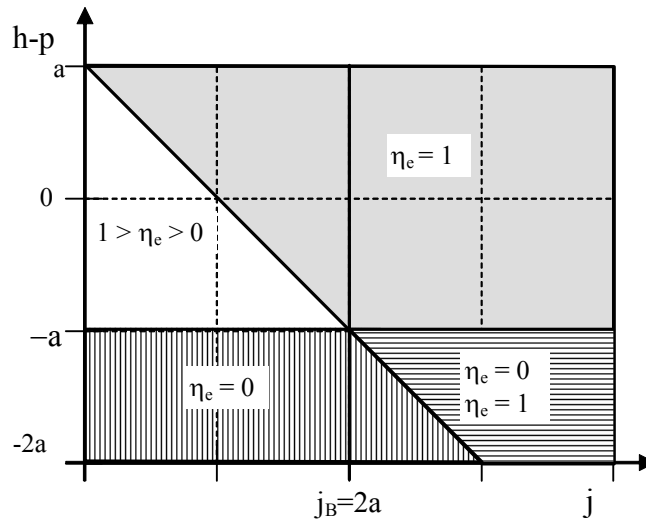
¹ Gordon (2004) note inédite. Cf. également Gordon *et al.* (2005) et Gordon, Nadal, Phan (2005) pour une généralisation. Je remercie M.B. Gordon et J.P. Nadal qui m'ont initié à cette méthode d'analyse des « diagrammes de phase » utilisés en physique.

diverge. Corolairement, la dérivée $\Phi'(\eta_a) = 2.a - j$ devient nulle pour cette valeur critique. Pour j supérieur à j_B , plusieurs points fixes peuvent apparaître, comme on le voit sur la figure A.1.2. Pour $j = 6$, par exemple, il existe une zone (en grisé sur la figure) où la droite d'équation $h - p$ coupe 3 fois la courbe représentative de la fonction $\Phi(\eta_a)$. On peut montrer que la solution en : $\eta_a = 0.5$ est instable et que les deux solutions concurrentes sont : $\eta_a^+ = 1$ et $\eta_a^- = 0$. Au delà de cette zone, lorsque $h - p$ devient trop négatif, ($h - p < a - j$) la seule solution devient $\eta_a = 0$. Comme η^* diverge en : $j = j_B = 2.a$, l'ensemble des solutions peut être regroupés selon les régimes suivants :

$$\text{pour: } j < j_B \begin{cases} \eta_e = 0 & \text{si: } h - p < -a \\ \eta_e = \eta^* & \text{si: } -a \leq h - p \leq a - j \\ \eta_e = 1 & \text{si: } a - j < h - p \end{cases}$$

$$\text{pour: } j > j_B \begin{cases} \eta_e = 0 & \text{si: } h - p < -a \\ \eta_e = 0 \text{ et } \eta_e = 1 & \text{si: } a - j \leq h - p \leq -a \\ \eta_e = 1 & \text{si: } a - j < h - p \end{cases}$$

Figure A.1.3 : diagramme de phase des régimes d'équilibre dans le cas d'une distribution uniforme sur $[-a, +a]$



Source : d'après Gordon *et al*, 2005

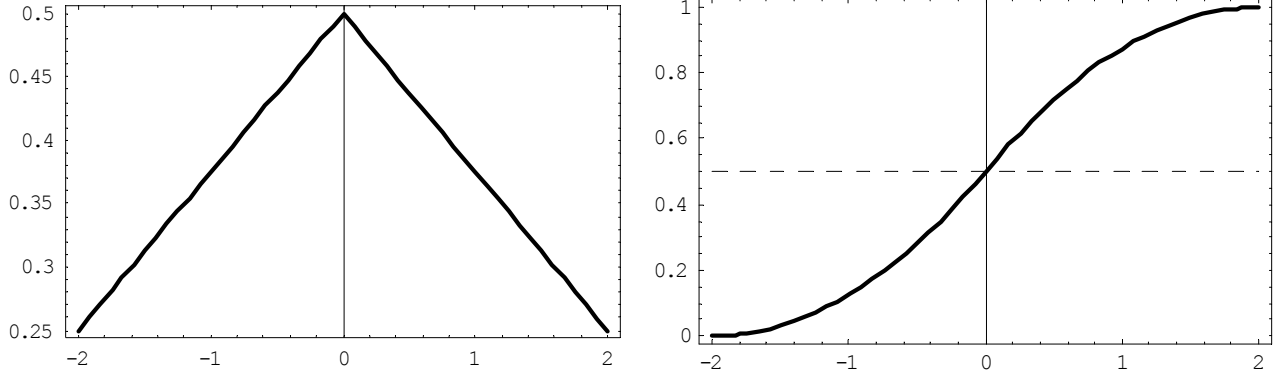
A.2 Distribution triangulaire des IWA sur $[-a, +a]$

On considère une distribution triangulaire des IWA avec moyenne nulle et maximum centrée sur 0

$$(A.2.1) \quad \begin{aligned} f_2(z) &= 0 & \text{si: } z \leq -a & \quad f_2(z) = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{z}{a} \right) & \text{si: } -a < z \leq 0 \\ f_2(z) &= \frac{1}{a} \left(1 - \frac{z}{a} \right) & \text{si: } 0 < z \leq a & \quad f_2(z) = 0 & \text{si: } a \leq z \end{aligned}$$

La densité de probabilité passe par un maximum $f_2^{\max}(z) = 1/a$ pour $z = 0$. Compte tenu de la symétrie par rapport à zéro, la fonction de répartition est telle que : $F_2(0) = 1/2$.

Figure A-2.1 : distribution triangulaire sur $[-2, +2]$



La probabilité globale d'adoption est liée par l'équation de point fixe :

$$(A.2.2) \quad \eta_a = P(z_i > z_m) = \int_{z_m}^{\infty} dF_2(z) = 1 - F_2(z_m) = G_2(z_m)$$

avec : $z_m \equiv j - h - j\eta_a \quad 0 \leq \eta_a \leq 1$

Plus spécifiquement, on a :

$$(A.2.3) \quad G_{2-}(z_m) = 1 - \frac{1}{a} \left[z + \frac{z^2}{2a} \right]_{-a}^{z_m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a} \left(z_m + \frac{z_m^2}{2a} \right) \quad \text{si: } z_m \leq 0 \Leftrightarrow -j\eta_a \leq h - p$$

$$G_{2+}(z_m) = \frac{1}{2} - \frac{1}{a} \left[z - \frac{z^2}{2a} \right]_0^{z_m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a} \left(z_m - \frac{z_m^2}{2a} \right) \quad \text{si: } z_m \geq 0 \Leftrightarrow h - p \geq -j\eta_a$$

Les valeurs de points fixes de η_a ne sont plus aussi directement accessibles qu'avec le cas simple de la distribution uniforme. Pour les étudier, on se sert comme précédemment de la formule (A.2.2), pour exprimer z_m en fonction du taux d'adoption η_a par inversion des fonctions F_2 dans (A.2.3) :

$$(A.2.4) \quad \eta_a = \frac{1}{2} - \frac{1}{a} \left(z_m + \frac{z_m^2}{2a} \right) \Rightarrow z_m = G_{2-}^{-1}(\eta_a) = -a \left(1 - \sqrt{2 - 2\eta_a} \right) \quad \text{si: } z_m \leq 0, \eta_a \geq 0.5$$

$$\eta_a = \frac{1}{2} - \frac{1}{a} \left(z_m - \frac{z_m^2}{2a} \right) \Rightarrow z_m = G_{2+}^{-1}(\eta_a) = a \left(1 - \sqrt{2\eta_a} \right) \quad \text{si: } z_m \geq 0, \eta_a \leq 0.5$$

En effet, parmi les 2 racines des deux équations du second degré en z_m , seules les solutions retenues vérifient :

$$(A.2.5) \quad G_{2-}^{-1}(1) = -a; \quad G_{2+}^{-1}(0) = a, \quad \text{avec : } z_m = G_{2-}^{-1}(0.5) = G_{2+}^{-1}(0.5) = 0$$

En remplaçant z_m par sa valeur selon (A.2.2), il vient :

$$(A.2.6) \quad h-p = \Phi(\eta_a) \begin{cases} \Phi^-(\eta_a) \equiv a(1-\sqrt{2-2\eta_a}) - j\eta_a & \text{si: } h-p \geq -j\eta_a; \eta_a \geq 0.5 \\ \Phi^+(\eta_a) \equiv -a(1-\sqrt{2\eta_a}) - j\eta_a & \text{si: } h-p \leq -j\eta_a; \eta_a \leq 0.5 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation de point fixe (A.2.2) correspondent comme précédemment aux solutions des équations (A.2.6). Selon la configuration de la fonction $\Phi(\eta_a)$, on aura donc soit une solution unique, soit la possibilité de plusieurs solutions. Commençons par étudier la configuration de la fonction $\Phi(\eta_a)$, par l'étude de ses dérivées

$$(A.2.7) \quad \begin{aligned} \frac{d\Phi^+}{d\eta_a} &= \frac{a}{\sqrt{2\eta_a}} - j & \text{avec: } \lim_{\eta_a \rightarrow 0^+} \frac{d\Phi^+}{d\eta_a} &= \infty \text{ et: } & \lim_{\eta_a \rightarrow 1/2^-} \frac{d\Phi^+}{d\eta_a} &= a - j \\ \frac{d\Phi^-}{d\eta_a} &= \frac{a}{\sqrt{2-2\eta_a}} - j; & \text{avec: } \lim_{\eta_a \rightarrow 1^-} \frac{d\Phi^-}{d\eta_a} &= \infty \text{ et: } & \lim_{\eta_a \rightarrow 1/2^+} \frac{d\Phi^-}{d\eta_a} &= a - j \end{aligned}$$

La zone à solution unique comprend la zone où la fonction $\Phi(\eta_a)$ est monotone croissante. Comme $\Phi(\eta_a)$ diverge quand η_a tends vers 0 et vers 1, si $h-p > j-a$ la solution unique est $\eta_a = 1$. Inversement $h-p < -a$, la solution unique est $\eta_a = 0$. Les équations (A.2.6) nous permettent ainsi de vérifier que nous avons les mêmes solutions qu'avec l'équation uniforme pour les trois points remarquables (0, 1/2, 1).

$$(A.2.8) \quad \begin{aligned} h-p &\leq -a & \text{quand } \eta_a &= 0 \\ h-p &= -j/2 & \text{quand } \eta_a &= 1/2 \\ h-p &\geq a-j & \text{quand } \eta_a &= 1 \end{aligned}$$

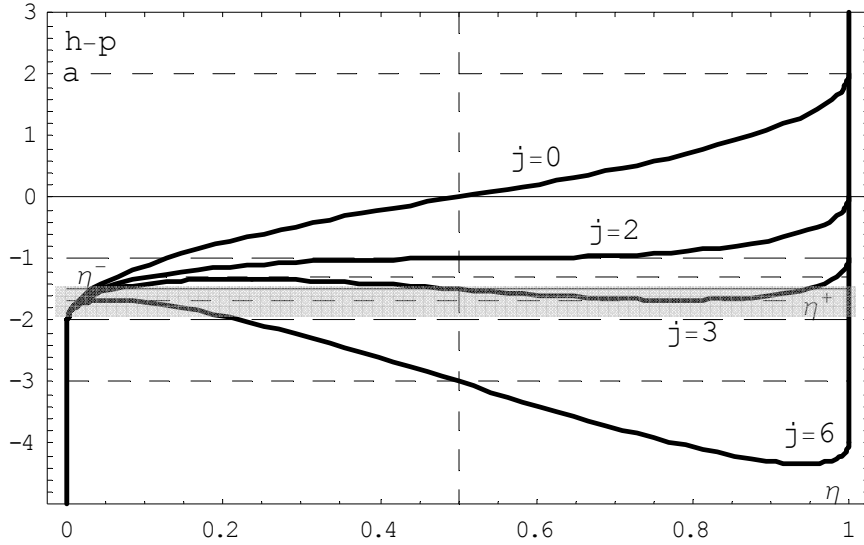
Il existe une *valeur critique* j_B au-delà de laquelle plusieurs points fixes peuvent apparaître. La zone correspondante commence pour la plus petite valeur de j pour laquelle la fonction $\Phi(\eta_a)$ admet une dérivée nulle. En effet, au delà de ce point $\Phi(\eta_a)$ n'est plus monotone croissante. Puisque la dérivée d'une fonction inverse est égale à l'inverse de la dérivée, cette valeur correspond à la valeur de η_a pour laquelle la densité de probabilité $f_2(z)$ est maximum, c'est-à-dire à $\eta_a = 0.5$, puisque l'on a alors $f_2(0) = 1/a = f_2^{\max}$. Donc, pour $\eta_a = 0.5$ on a :

$$(A.2.9) \quad \begin{aligned} \lim_{\eta_a \rightarrow 1/2^-} \frac{d\Phi^+}{d\eta_a} &= a - j_B = \lim_{\eta_a \rightarrow 1/2^+} \frac{d\Phi^-}{d\eta_a} = a - j_B = \frac{1}{f_2^{\max}} - j_B = 0 \\ \text{pour: } \eta_a &= 1/2 & \Rightarrow & j_B = a \end{aligned}$$

Sur la figure A.2.2, on voit que pour des valeurs de j supérieures à $j_B = a$, il existe une zone (grisée entre les deux lignes pointillées sur la figure A.2.2.) où la droite égale à $h-p$ coupe 3 fois la courbe représentative de la fonction $\Phi(\eta_a)$. On peut montrer que la solution en $\eta_a = 0.5$ est instable, et qu'il

y a deux solutions stables : $0 \leq \eta_a^- < 0.5$, et : $0.5 < \eta_a^+ \leq 1$.

Figure A.2.2 : points fixes dans l'espace (h-p, j)



Pour les valeurs supérieures de $j > j_B$, on peut définir deux fonctions inverses $\eta_0^-(j)$ et $\eta_0^+(j)$ qui correspondent à l'ensemble de valeurs η_0 pour lesquelles la dérivée $d\Phi(\eta_a)/d\eta_a$ est nulle :

$$(A.2.10) \quad \begin{aligned} \frac{d\Phi_{\max}^+}{d\eta} = 0 &\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2 \cdot \eta_0^-}} = j \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \eta_a^- \leq \eta_0^-(j) = \frac{a^2}{2 \cdot j^2} \leq 1/2 \\ \frac{d\Phi_{\min}^-}{d\eta} = 0 &\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2 - 2 \cdot \eta_0^+}} = j \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq \eta_a^+ \geq \eta_0^+(j) = 1 - \frac{a^2}{2 \cdot j^2} \geq 1/2 \end{aligned}$$

(avec : $j > j_B$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \eta_0^+ = 0$ et : $\lim_{j \rightarrow \infty} \eta_0^- = 1$)

Pour $j > j_B$, l'équation de : $h - p < \Phi(\eta)$ admet 2 solutions dans la zone de l'espace (h-p, j) comprise entre les deux courbes $\Phi_{\max}^+(\eta_0^-(j))$ et $\Phi_{\min}^-(\eta_0^+(j))$

$$(A.2.11) \quad \begin{aligned} h - p < \Phi_{\max}^+(\eta_0^-(j)) &= -a + \frac{a^2}{2 \cdot j} & 0 \leq \eta_a^- \leq \eta_0^-(j) \leq 1/2 \\ h - p > \Phi_{\min}^-(\eta_0^+(j)) &= a - j - \frac{a^2}{2 \cdot j} & 0,5 \leq \eta_0^+ \leq \eta_a^+(j) \leq 1 \end{aligned}$$

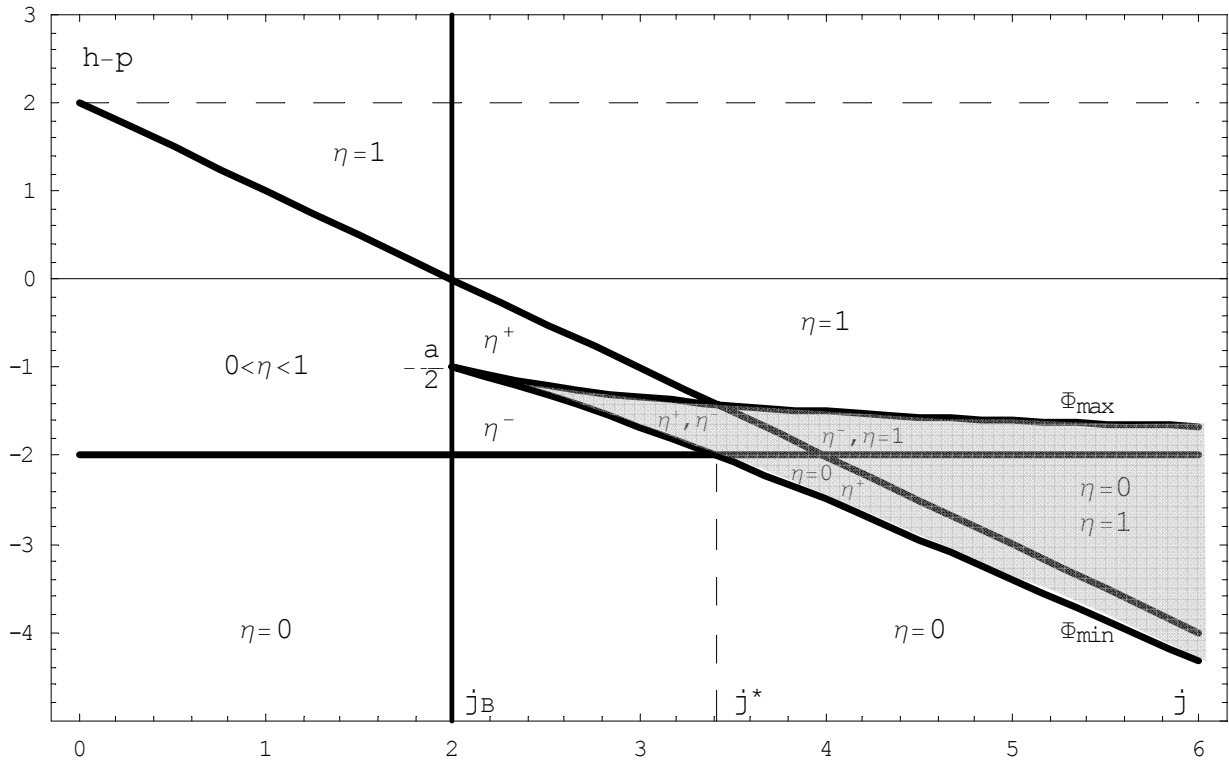
$$\text{avec:} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{\min}^-(\eta_0^+(j)) = -a \quad \text{et:} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{\max}^+(\eta_0^-(j)) = a - j$$

Les courbes représentatives de $\Phi_{\max}^+(\eta_0^-(j))$ et $\Phi_{\min}^-(\eta_0^+(j))$ coupent les droites $-a$ et $a-j$ à un même point d'abscisse $j^* > j_B$ (A.2.12 et Figure A.2.3). Pour des valeurs de $j > j^*$, l'équation : $h - p < \Phi(\eta)$ admet 2 solutions (η_a^- et $\eta_a^+ = 1$) dans la zone où : $-a < h - p < \Phi_{\max}^+$ et deux solutions

($\eta_a^- = 0$ et η_a^+) dans la zone : $a - j > h - p > \Phi_{\min}^-$. Dans la zone où l'on a : $a - j < h - p < -a$, les deux solutions sont : $\eta_a^- = 0, \eta_a^+ = 1$ Enfin, pour : $h - p < \Phi_{\min}$, $\eta_a = 0$ est solution unique, et pour : $h - p > \Phi_{\max}$, $\eta_a = 1$ est solution unique (Figure A.2.3).

$$(A.2.12) \quad \Phi_{\max}^+ - a + j^* = \Phi_{\min}^- + a = 2a - j^* - \frac{a^2}{2j^*} = 0 \Rightarrow j^* = a \left(1 \pm 2^{-\frac{1}{2}} \right) \approx a.1,707 > j_B$$

Figure A.2.3. : Distribution triangulaire, l'espace des phases : h-p, j



Annexe B : Main tremblante logistique : distribution invariante de probabilités

B.1 .Probabilités de transition markovienne et bilan des flux ²

On notera par $p(n, t)$ la probabilité de se trouver dans la configuration sociale $\{N-n, n\}$ à l'instant t ; $p(n, t)$ vérifie la contrainte de normalisation:

$$(B.1) \quad \sum_{n=0}^N p(n, t) = 1$$

Dans la dynamique séquentielle, un agent est tiré au hasard à chaque instant t et recalcule son état. Les probabilités de transition entre configurations sociales associées au choix de cet agent pour la configuration sociale $n(t)$ seront notées :

$$(B.2) \quad \begin{aligned} \text{Pr oba}(n \rightarrow n+1) &\equiv w_{\uparrow}(n) = (1 - n/N) \cdot p_{0 \rightarrow 1}(n) \\ \text{Pr oba}(n \rightarrow n-1) &\equiv w_{\downarrow}(n) = (n/N) \cdot p_{1 \rightarrow 0}(n) \end{aligned}$$

La probabilité de transition à l'instant t de n à $n+1$ est égale à la probabilité que l'agent en question se trouve dans l'état [0] (avec $\text{proba}(\omega_i = 0) = 1 - n/N$) passe dans l'état [1] (avec probabilité : $p_{0 \rightarrow 1}(n)$), les deux probabilités étant indépendantes. De même, la probabilité de transition à l'instant t de n à $n-1$ est égale à la probabilité que l'agent soit dans l'état [1] ($\text{proba}(\omega_i = 0) = n/N$) et qu'il passe dans l'état [0] (avec probabilité : $p_{1 \rightarrow 0}(n)$). Comme ces deux probabilités de transition de dépendent que de $n(t)$, il s'agit d'un processus markovien de premier ordre.

De plus, comme les valeurs possibles de n sont bornées par la taille de la population : $0 \leq n \leq N$, les probabilités de transition entre configurations sociales doivent vérifier les conditions suivantes aux limites :

$$(B.3) \quad \begin{aligned} w_{\uparrow}(-1) &= w_{\downarrow}(0) = 0 \\ w_{\uparrow}(N) &= w_{\downarrow}(N+1) = 0 \end{aligned}$$

La configuration sociale ne peut parvenir à l'état $n = 0$, à partir d'une valeur inférieure à 0, ni descendre au dessous de 0. Symétriquement, on ne peut parvenir à l'état $n = N$ à partir d'une valeur supérieure à N , ni prendre une valeur supérieure à N .

Au voisinage de t , on peut faire un bilan détaillé de la *variation de la masse de probabilité* par unité

de temps (entre t et $t+dt$), au moyen d'un bilan des mouvements vers l'état « n », moins le bilan des mouvements issus de l'état « n » :

Figure B-1 : bilan des probabilités de flux entre l'état « n » et ses voisins.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Etat} \\ \{n+1\} \end{array} \right] p(n+1).w_{\downarrow}(n+1) \rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Etat} \\ \{n\} \end{array} \right] p(n,t).w_{\downarrow}(n) \rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Etat} \\ \{n-1\} \end{array} \right]$$

$$\leftarrow p(n,t).w_{\uparrow}(n) \left[\begin{array}{c} \text{Etat} \\ \{n\} \end{array} \right] \leftarrow p(n-1).w_{\uparrow}(n-1) \left[\begin{array}{c} \text{Etat} \\ \{n-1\} \end{array} \right]$$

Ce bilan des entrées et des sorties permet d'établir l'équation maîtresse (*master equation* en anglais, aussi nommée équation pilote), présentée ici à l'aide des *flux de probabilités*

$$(B.4) \quad \frac{dp(n,t)}{dt} = \Delta\Psi_{\uparrow}(n,t) + \Delta\Psi_{\downarrow}(n,t)$$

Où : $\Delta\Psi_{\uparrow}(n,t) \equiv \{ p(n-1,t).w_{\uparrow}(n-1) - p(n,t).w_{\uparrow}(n) \}$ représente le bilan des entrées dans l'état [1] et : $\Delta\Psi_{\downarrow}(n,t) \equiv \{ p(n+1,t).w_{\downarrow}(n+1) - p(n,t).w_{\downarrow}(n) \}$ le bilan des sorties de l'état [1]

Compte tenu des conditions aux limites sur les probabilités de transition (1.3), les flux « bruts » de l'équation maîtresse (B.4) vérifient eux même des conditions aux limites :

$$(B.5) \quad \Delta\Psi_{\downarrow}(0,t) = \Delta\Psi_{\uparrow}(N,t) = 0 ;$$

1.2. Solutions stationnaires de l'équation pilote

Lorsque le processus est ergodique, il existe une seule distribution stationnaire (asymptotique) de probabilité, également appelée « distribution invariante de probabilité ». Pour un processus markovien de premier ordre, on a un comportement asymptotique ergodique lorsque les probabilités individuelles de transition $p_{0 \rightarrow 1}(n)$ et $p_{1 \rightarrow 0}(n)$ sont positives (aux limites, elles sont nulles, cf.

B.5). Sous ces hypothèses, l'état stationnaire vérifie les conditions aux limites (B.5) et la condition de stationnarité (B.6) :

$$(B.6) \quad \frac{dp_s(n)}{dt} = \Delta\Psi_{S\uparrow}(n) + \Delta\Psi_{S\downarrow}(n) = 0 \quad \forall n, 0 \leq n \leq N$$

Grâce aux conditions aux limites, la condition de stationnarité permet de mettre les probabilités de se trouver dans une configuration sociale : $p_s(n)$ sous une forme récursive paramétrée par les probabilités markoviennes de transition entre configurations sociales. En effet, compte tenu de la condition aux limites (B.5) on a :

$$(B.7) \quad \Delta\Psi_{S\uparrow}(0) = -\Delta\Psi_{S\downarrow}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{\downarrow}(1).p_s(1) = w_{\uparrow}(0).p_s(0)$$

En appliquant (B.6) à $n = 1$, il vient : $p_s(0).w_{\uparrow}(0) - p_s(1).w_{\uparrow}(1) = -p_s(2).w_{\downarrow}(2) + p(1).w_{\downarrow}(1)$ et compte tenu de (B.7) : $p_s(1).w_{\uparrow}(1) = p_s(2).w_{\downarrow}(2)$. Pour n quelconque on a la formule récursive :

$$(B.8) \quad p_{st}(n) = p_{st}(n-1) \cdot \frac{w_{\uparrow}(n-1)}{w_{\downarrow}(n)}$$

Cette forme permet d'avoir une meilleure interprétation de la distribution stationnaire. Pour tout état n appartenant à l'ensemble des configurations sociales possibles, les probabilités invariantes associées aux états par la distribution stationnaire de probabilité compensent juste les probabilités markoviennes de transition entre configurations sociales, de telle manière que les flux entrant dans un état soient exactement compensés par les flux sortants. Cette relation récursive permet également d'obtenir une solution exacte de la distribution :

$$(B.9) \quad p_{st}(n) = p_s(0) \cdot \prod_{i=1}^n \frac{w_{\uparrow}(i-1)}{w_{\downarrow}(i)} ; \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

En utilisant la contrainte de normalisation (B.1) on peut exprimer $p_s(0)$ en fonction des les probabilités de transition entre configurations sociales :

$$p_s(0) = \left(1 + \sum_{n=1}^N \prod_{i=1}^n \frac{w_{\uparrow}(i-1)}{w_{\downarrow}(i)} \right)^{-1}$$

Dans le cas de la « main tremblante », la probabilité de passer d'un état à un autre est indépendante du choix antérieur donc on a :

$$p_{0 \rightarrow 1}(\eta) = p(\omega_i = 1 | z(\eta)) = \text{proba}(\varepsilon_i > z(\eta)) = 1 - F(z(\eta))$$

$$p_{1 \rightarrow 0}(\eta) = p(\omega_i = 0 | z(\eta)) = \text{proba}(\varepsilon_i \leq z(\eta)) = F(z(\eta))$$

Les probabilités de transition entre configurations sociales associées au choix de cet agent pour la configuration sociale $n(t)/N \equiv \eta$ seront notées :

$$\text{Pr oba}(n \rightarrow n+1) = w_{\uparrow}(n) = (1-\eta) \cdot (1-F(z(\eta)))$$

$$\text{Pr oba}(n \rightarrow n-1) = w_{\downarrow}(n) = \eta \cdot F(z(\eta))$$

Si $F(\cdot)$ est logistique on a :

$$p_{st}(n) = p_s(0) \cdot C_N^n \prod_{k=1}^n \frac{(1 - F((k-1)/N))}{F(k/N)} = p_s(0) \cdot C_N^n \prod_{k=1}^n \exp(+\beta(h + j(k/N)))$$

$$p_{st}(n) = p_s(0) \cdot C_N^n \exp(+\beta(n \cdot h + j \cdot \eta \cdot (n+1)/2)) \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$